UNIVERSITÉS FRANCOPHONES

AUPELF • UREF

ANALYSE

PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE

Edmond FEDIDA
Mamadou SANGHARE
El Hadji Cheickh M'baké DIOP

EDICEF/AUPELF

UNIVERSITÉS FRANCOPHONES

AUPELF•UREF

ANALYSE

1er CYCLE UNIVERSITAIRE

Edmond FEDIDA
Professeur à l'Université d'Abidjan
Professeur à la Faculté des Sciences
U.C.A.D., Dakar

Mamadou SANGHARE
Maître de conférences à la Faculté des Sciences
U.C.A.D., Dakar

El Hadji Cheikh M'backé DIOP
Maître-Assistant à la Faculté des Sciences
U.C.A.D., Dakar

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen
92178 VANVES Cedex

La collection Universités Francophones

La diffusion de l'information scientifique et technique est un facteur essentiel du développement. Aussi dès 1988, l'agence francophone pour l'enseignement supérieur et la recherche (AUPELF-UREF), mandatée par les sommets francophones pour produire et diffuser revues et livres scientifiques, a créé la collection **Universités francophones**.

Lieu d'expression de la commuauté scientifique de la langue française, **Universités francophones** vise à instaurer une collaboration entre enseignants et chercheurs francophones en publiant des ouvrages, coédités avec des éditeurs francophones, et largement diffusés dans les pays du Sud, grâce à une politique tarifaire préférentielle.

Composition de la collection :

• *Les manuels :* cette série didactique est le cœur de la collection. Elle s'adresse à un public de deuxième et troisième cycles universitaires et vise à constituer une bibliothèque de référence couvrant les principales disciplines à l'université.

• *Sciences en marche :* cette série se compose de monographies qui font la synthèse des travaux de recherche en cours.

• *Actualité scientifique :* dans cette série sont publiés les actes de colloques organisés par les réseaux thématiques de recherche de l'UREF.

• *Prospectives francophones :* s'inscrivent dans cette série des ouvrages de réflexion donnant l'éclairage de la francophonie sur les grandes questions contemporaines.

• Enfin, les séries *Actualités bibliographiques* et *Actualités linguistiques francophones* accueillent lexiques et répertoires.

Notre collection, en proposant une approche plurielle et singulière de la science, adaptée aux réalités multiples de la Francophonie, contribue efficacement à promouvoir la recherche dans l'espace francophone et le plurilinguisme dans la recherche internationale.

Professeur Michel Guillou
directeur général de l'AUPELF
Recteur de l'UREF

Diffusion :
HACHETTE DIFFUSION INTERNATIONALE ou ELLIPSES selon pays

ISBN 2-85-069839-3
ISSN 0993-3948

Avant-Propos

Ce livre d'analyse est le pendant naturel du livre du Professeur Saliou TOURÉ édité chez EDICEF, et consacré au cours d'Algèbre du 1er cycle universitaire.

Cependant, le programme d'Analyse du premier cycle étant *grosso modo* le double de celui d'Algèbre, le présent ouvrage ne couvre que le cours de première année et un peu au delà, afin de présenter aux étudiants un ouvrage abordable et peu volumineux.

Ce livre s'adresse, par ses différents niveaux de lecture, aussi bien aux étudiants de premier cycle, en sciences exactes ou en sciences expérimentales, qu'aux étudiants des classes de Mathématiques Supérieures.

Avec ses volets consacrés successivement au cours, aux exercices et aux problèmes de synthèse, nous espérons faire de cet ouvrage un outil de travail assez complet, principalement pour les étudiants d'Universités africaines qui manquent souvent de livres de cours et d'exercices.

Le contenu du volume couvre largement le programme de première année du premier cycle, avec des compléments importants sur la continuité et la convergence uniforme, les fonctions implicites, les fonctions de plusieurs variables et les propriétés métriques des arcs de courbes. En outre chaque chapitre se termine sur une rubrique « à retenir » qui regroupe, sous forme de résumé, les principaux résultats qu'il faut effectivement retenir avant de passer au chapitre suivant.

Le choix des exercices couvre plusieurs objectifs :

— aider le lecteur à évaluer ses connaissances et à les mettre en œuvre,

— établir des résultats nouveaux qui complètent le cours,

— appliquer les concepts mathématiques étudiés, à la physique, la chimie, la mécanique, etc.

Les problèmes de synthèse, présentés à la fin des chapitres, permettront aux lecteurs de tester l'ensemble de leurs connaissances en vue des examens.

Enfin, nous avons ajouté un index historique qui regroupe succinctement les biographies des différents mathématiciens, dont les noms apparaissent dans cet ouvrage. Nous pensons en effet que l'histoire des mathématiques ne peut qu'enrichir et « humaniser » les concepts mathématiques abordés par les étudiants. On pourra, dans un premier ter

reporter la lecture du chapitre 1 essentiellement consacré aux fondements, et aborder directement le chapitre 2.

Les commentaires, critiques et suggestions éventuelles de la part de nos lecteurs seront les bienvenus.

Nous remercions Mademoiselle Ndeye CODOU NDIAYE qui a réalisé la saisie du texte.

Les auteurs

Sommaire

Chapitre 1 : THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ENSEMBLES CONSTRUCTION DE $\mathbb{R}$

1.1. Éléments de la théorie des ensembles

ENSEMBLE ET APPARTENANCE

1.1.1. Définition

On appelle ensemble une collection d'objets : ces objets sont les éléments de l'ensemble.

1.1.2. Exemples

1) Les entiers $0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ forment un ensemble appelé l'ensemble des entiers naturels et noté $\mathbb{N}$.

2) Les entiers $\cdots -4, -3, -2, -1, \cdots 1, 2, 3, 4, \cdots$ forment l'ensemble des entiers rationnels que l'on note $\mathbb{Z}$.

3) On désigne par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $-\frac{1}{4}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{18}, 0, 1, 4, \frac{1}{2}, \cdots$

Soit E un ensemble. Pour dire qu'un objet x est un élément de E, on écrit $x \in E$ et on lit « x appartient à E », et pour dire que x n'est pas un objet de E on écrit $x \notin E$ et on lit « x n'appartient pas à E ».

Un ensemble est vide s'il n'a aucun élément ; l'ensemble vide est noté $\emptyset$.

Inclusion — Soient E et F deux ensembles. On dit que E est *inclus* dans F et on note $E \subset F$ ou $F \supset E$ si tout élément de E est élément de F. On dira alors que E *est un sous-ensemble de* F ou que E est une partie de F.

$E = F$ si $E \subset F$ et $F \subset E$.

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES ENSEMBLES

Intersection — Soient E et F deux ensembles. Leur intersection est l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément à E et à F : cet ensemble se note $E \cap F$. Si $E \cap F = \emptyset$ on dit que E et F sont disjoints.

Réunion — La réunion des ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F: cet ensemble se note $E \cup F$.

Complémentaire — Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle complémentaire de A par rapport à E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A : on note cet ensemble $\complement_E A$.

Propriétés des opérations élémentaires

Proposition

Soient A, B et C trois parties d'un même ensemble E. Alors :

1) $A \cap B = B \cap A$

2) $A \cup B = B \cup A$

3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$

6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

7) $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$

8) $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$

Démonstration

1) $x \in A \cap B$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$ si et seulement si $x \in B$ et $x \in A$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in B \cap A$.

2) $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$, donc $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in B$ ou $x \in A$, ce qui revient à dire que $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in B \cup A$.

3) $x \in (A \cap B) \cap C$ si et seulement si $x \in A \cap B$ et $x \in C$, ce qui équivaut à $x \in A$ et $x \in B$ et $x \in C$.

De même $x \in A \cap (B \cap C)$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B \cap C$ et cela équivaut à $x \in A$ et $x \in B$ et $x \in C$.

4) $x \in (A \cup B) \cup C$ si et seulement si $x \in A \cup B$ ou $x \in C$, donc si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$. D'autre part $x \in A \cup (B \cup C)$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$.

5) $x \in A \cap (B \cup C)$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B \cup C$. Ainsi $x \in A \cap (B \cap C)$ si et seulement si ($x \in A$ et $x \in B$) ou ($x \in A$ et $x \in C$) ce qui équivaut à $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$.

6) $x \in A \cup (B \cap C)$ équivaut à $x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$ et cette dernière relation équivaut à ($x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$).

7) $x \notin \complement_E A \cup \complement_E B$ équivaut à $x \notin \complement_E A$ et $x \notin \complement_E B$. Autrement dit $x \notin \complement_E A \cup \complement_E B$ équivaut à : $x \in A$ et $x \in B$. Donc $x \notin \complement_E A \cup \complement_E B$ si et seulement si $x \notin \complement_E(A \cap B)$.

8) Posons $A' = \complement_E A$ et $B' = \complement_E B$. On a, d'après 7), $\complement_E(A' \cap B') = \complement_E A' \cup \complement_E B'$ D'où : $A' \cap B' = \complement_E(A \cup B)$.

1.2. Construction de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

1.2.1. Définition

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ converge vers un élément a de $\mathbb{Q}$ si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'inégalité $n > n_0$ entraîne $|x_n - a| < \varepsilon$.

DÉFINITION

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ est *dite de Cauchy* si, quel que soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les inégalités $p > n_0$ et $q > n_0$ entraînent $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

1.2.2. Proposition

Toute suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$, convergeant dans $\mathbb{Q}$ est de Cauchy.

Démonstration — Supposons que (x_n) converge vers $a \in \mathbb{Q}$ et soit $\varepsilon > 0$, ($\varepsilon \in \mathbb{Q}$). Il existe n_0 tel que l'inégalité $n > n_0$ entraîne $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > n_0$ et $q > n_0$. Alors

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - a| + |x_q - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

1.2.3. Proposition

Toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$ est bornée.

Démonstration — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, ($x_n \in \mathbb{Q}$). Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $n \geq n_0$ entraîne $|x_n - x_{n_0}| < 1$.

On a donc, pour $n \geq n_0$, $x_{n_0} - 1 < x_n < x_{n_0} + 1$.

Posons $M = \mathrm{Max}[\{x_n \ / \ n < n_0\} \cup \{x_{n_0} + 1\}]$ et $m = \mathrm{Min}[\{x_n \ / \ n < n_0\} \cup \{x_{n_0} - 1\}]$

On a alors $m < x_n < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.2.4. Proposition

Soient (x_n) et (y_n) deux suites à éléments dans $\mathbb{Q}$. Si (x_n) converge vers 0 et si (y_n) est bornée, alors la suite $(x_n y_n)$ converge vers 0.

Démonstration — Soit $M \in \mathbb{Q}$ et $M > 0$, tel que $|y_n| < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étant donné $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'inégalité $n > n_0$ entraîne $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M+1}$. Donc pour tout $n > n_0$, on a $|x_n y_n| < \frac{\varepsilon}{M+1} \cdot M < \varepsilon$.

1.2.5. Proposition

Si les suites (x_n) et (y_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ sont de Cauchy, alors les suites $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont de Cauchy.

Démonstration — Soit $M \in \mathbb{Q}$ tel que $|x_n| < M_0$ et $|y_n| < M_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $\varepsilon \in \mathbb{Q}\,(\varepsilon > 0)$ étant donné, il existe des entiers naturels n_0 et n_1 tels que pour $p, q \in \mathbb{N}$ les inégalités $p > n_0$ et $q > n_0$ entraînent $|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2M+2}$ et les inégalités $p > n_1$ et $q > n_1$ entraînent $|y_p - y_q| < \frac{\varepsilon}{2M+2}$

Posons $n_2 = \mathrm{Max}(n_0, n_1)$ et soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > n_2$ et $q > n_2$. On a alors

$$|(x_p + y_p) - (x_q + y_q)| \leq |x_p - x_q| + |y_p - y_q| < \frac{2\varepsilon}{2M+2} < \varepsilon$$
$$|(x_p - y_p) - (x_q - y_q)| \leq |x_p - x_q| + |y_p - y_q| < \frac{2\varepsilon}{2M+2} < \varepsilon$$
$$|x_p y_p - x_q y_q| \leq |x_p|\,|y_p - y_q| + |y_q|\,|x_p - x_q| < \frac{(2M)\varepsilon}{2M+2} < \varepsilon$$

1.2.6. Proposition

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'eléments de $\mathbb{Q}$. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Alors il existe $\alpha > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n$, l'inégalité $n \geq n_0$ entraîne $|x_n| > \alpha$. De plus la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \geq n_0}$ est de Cauchy.

Démonstration — On va raisonner par l'absurde en supposant que $\forall \alpha > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m > n$ tel que $|x_m| < \alpha$. Soit $\alpha > 0$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ et $m \geq m_0$ entraînent $|x_m - x_n| < \alpha/2$.

Maintenant par l'hypothèse, il existe $n_1 > n_0$ tel que $|x_{n_1}| < \alpha/2$. $n \geq n_0$ entraîne alors $|x_n| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$. α étant quelconque, ceci signifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. D'où la contradiction.

— Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \geq n_0$ et $q \geq n_0$. On a $\left|\frac{1}{x_p} - \frac{1}{x_q}\right| = \frac{|x_p - x_q|}{|x_p x_q|} < \frac{4}{\alpha^2}|x_p - x_q|$, et comme la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est de Cauchy, il en résulte que la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \geq n_0}$ est aussi de Cauchy.

Posons $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels. Il résulte de la proposition 1.2.5. que $\mathscr{C}$ est un anneau commutatif pour l'addition et la multiplication définies comme suit :

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n),\ (x_n) \cdot (y_n) = (x_n y_n).$$

Il est clair que la suite stationnaire (x_n) où $x_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est élément unité de cet anneau. Posons $\mathscr{C}_0$ l'ensemble des suites de nombres rationnels convergeant vers 0. $\mathscr{C}_0$ est un idéal de $\mathscr{C}$ d'après la proposition 1.2.4.

1.2.7. Proposition

$\mathscr{C}_0$ est un idéal maximal de l'anneau $\mathscr{C}$.

Démonstration — Soit (x_n) une suite de Cauchy ne convergeant pas vers 0. D'après la proposition 1.2.6, on peut supposer que $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et il résulte alors de la même proposition que la suite $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_n$ est de Cauchy et il est clair que le produit $(x_n)\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ est l'élément unité de $\mathscr{C}$. Comme $\mathscr{C}_0$ est un idéal maximal de $\mathscr{C}$, donc l'anneau-quotient $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ est un corps commutatif.

DÉFINITION

Le corps commutatif $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ est appelé droite numérique et désigné par $\mathbb{R}$. Ses éléments sont appelés nombres réels.

On peut constater facilement que l'application φ, qui consiste à associer à chaque nombre rationnel q la suite stationnaire (x_n) où $x_n = q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est un homomorphisme injectif de l'anneau $\mathbb{Q}$ dans l'anneau $\mathscr{C}$; de plus si q et q' sont des éléments de $\mathbb{Q}$ tels que $q \neq q'$, alors la suite (de Cauchy) $\varphi(q) - \varphi(q') = (x_n)$ où $x_n = q - q'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ne converge pas vers 0. Donc si l'on pose p la surjection canonique de $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{R}$ l'application $i = p \circ \varphi$ est un homomorphisme injectif du corps $\mathbb{Q}$ dans le corps $\mathbb{R}$. Le morphisme i permet d'identifier la classe modulo $\mathscr{C}_0$ des suites de Cauchy convergeant vers q au nombre rationnel q, et par la suite, de considérer $\mathbb{Q}$ comme sous-corps de $\mathbb{R}$.

1.2.8. Proposition

L'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est stricte.

Démonstration — Considérons la suite de nombres rationnels $(x_n)_{n \geq 0}$, où $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Pour $p > q$ on a $x_p - x_q = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} \cdots + \frac{1}{p!}$. Or

$$\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \cdots + \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{(q+1)!}\Big[1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(1+q)^2} + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{(1+q)^{p-q-1}}\Big],$$

$$\frac{1}{(q+1)!}\left[1+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(1+q)^2}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1}{(1+q)^{p-q-1}}\right]<\frac{1}{(q+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{1}{qq!}.$$

donc $|x_p - x_q| < \frac{1}{n}$ pour $p \geq q \geq n \geq 1$ ce qui prouve que $x = (x_n)$ est une suite de Cauchy c'est-à-dire un élément de $\mathscr{C}$. Montrons que le nombre réel $\overline{x}$ qui est la classe de (x_n) modulo $\mathscr{C}_0$ n'appartient pas $\mathbb{Q}$. Autrement dit que (x_n) ne converge pas vers un élément de $\mathbb{Q}$.

Supposons le contraire et soient $s \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{N}^*$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{s}{t}$. De l'inégalité $0 < x_p - x_q < \frac{1}{qq!}$ pour $p > q > 1$, on déduit, en faisant tendre p vers l'infini, l'inégalité suivante : (1) $0 < \frac{s}{t} - x_q \leq \frac{1}{qq!}$, car la suite (x_n) étant strictement croissante, on a $x_m < \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{s}{t}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

On prend $q > t$, comme $\frac{s}{t} - x_q$ est un élément de $\mathbb{Q}$, on peut écrire $\frac{s}{t} - x_q = \frac{d}{q!}$, où $d \in \mathbb{Z}$. (1) s'écrit donc $0 < \frac{d}{q!} \leq \frac{1}{qq!}$, d'où $0 < d \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$. Ce qui est impossible. Donc le nombre e de $\mathbb{R}$, classe modulo $\mathscr{C}_0$ de la suite $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ n'appartient pas $\mathbb{Q}$, on dit que e est irrationnel.

1.3. Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Nous allons munir $\mathbb{R}$ d'une relation d'ordre compatible avec sa structure de corps et qui prolonge l'ordre naturel de $\mathbb{Q}$.

Soit (x_n) un élément de $\mathscr{C}$. On dit (x_n) est strictement positif s'il existe $\beta \in \mathbb{Q}$, $\beta > 0$ et s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que l'inégalité $n > n_0$ implique $x_n > \beta$. On dit que (x_n) est strictement négatif si $(-x_n)$ est strictement positif. On note $\mathscr{C}_+^*$ l'ensemble des éléments strictement positifs de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_-^*$ l'ensemble des éléments négatifs de $\mathscr{C}$.

1.3.1. Proposition

$\mathscr{C}_+^*$, $\mathscr{C}_-^*$ et $\mathscr{C}_0$ forment une partition de $\mathscr{C}$.

Démonstration — Soit $(x_n) \in \mathscr{C}$. On a l'équivalence $(x_n) \in \mathscr{C}_0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, donc

$$\mathscr{C}_+^* \cap \mathscr{C}_0 = \mathscr{C}_-^* \cap \mathscr{C}_0 = \emptyset$$

Supposons qu'il existe $(x_n) \in \mathscr{C}_+^* \cap \mathscr{C}_-^*$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ tels que pour $n > n_0$ on ait : $-\gamma > x_n > \beta$, ce qui est impossible, donc $\mathscr{C}_+^* \cap \mathscr{C}_-^* \neq \emptyset$.

Soit $(x_n) \in \mathscr{C}$ tel que $(x_n) \in \mathscr{C}_+^* \cap \mathscr{C}_-^*$. Alors

$$(\forall \alpha > 0), (\alpha \in \mathbb{Q})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m_1 > n)(\exists m_2 > n)(x_{m_1} \leq \alpha \text{ et } -\alpha \leq x_{m_2}).$$

Soit $\varepsilon > 0\,(\varepsilon \in \mathbb{Q})$. Comme (x_n) est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les inégalités $n > n_0$ et $q > n_0$ entraînent $x_q - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x_q + \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient $m_1 > n_0$ et $m_2 > n_0$ tels que $x_{m_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $-\frac{\varepsilon}{2} \leq x_{m_2}$. On a alors :

$$x_n < x_{m_1} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad -\varepsilon \leq x_{m_2} - \frac{\varepsilon}{2} < x_n,$$

donc pour $n > n_0$ on a : $-\varepsilon < x_n < \varepsilon$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ c'est-à-dire $(x_n) \in \mathscr{C}_0$. D'où $\mathscr{C} = \mathscr{C}_+^* \cup \mathscr{C}_-^* \cup \mathscr{C}_0$. On note $\mathscr{C}_+ = \mathscr{C}_+^* \cup \mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_- = \mathscr{C}_-^* \cup \mathscr{C}_0$.

1.3.2. Proposition

Si $x = (x_n) \in \mathscr{C}_+$ et $y = (y_n) \in \mathscr{C}_+$, alors $x + y \in \mathscr{C}_+$ et $xy \in \mathscr{C}_+$.

Démonstration — Si $x \in \mathscr{C}_0$ et $y \in \mathscr{C}_0$, alors $x + y \in \mathscr{C}_0$ et $xy \in \mathscr{C}_0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n + \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

Si $x \in \mathscr{C}_+^*$ et $y \in \mathscr{C}_+^*$, alors il existe $\beta > 0$, $\beta \in \mathbb{Q}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$, il existe $\gamma > 0$, $\gamma \in \mathbb{Q}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour $n > \sup(n_1, n_2)$ on ait $x_n > \beta$ et $y_n > \gamma$. Donc, pour $n > \sup(n_1, n_2)$ on a : $x_n + y_n > \beta + \gamma$ et $x_n y_n > \beta\gamma$. Ce qui entraîne $x + y \in \mathscr{C}_+$ et $xy \in \mathscr{C}_+$.

Si $x \in \mathscr{C}_0$ et $y \in \mathscr{C}_+^*$, alors il existe $\beta > 0$, $\beta \in \mathbb{Q}$, et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que l'inégalité $n > n_0$ entraîne $y_n > \beta$; comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que l'inégalité $n > n_1$ entraîne $-\frac{\beta}{2} < x_n < \frac{\beta}{2}$. Donc pour $n > \sup(n_0, n_1)$ on a : $x_n + y_n > -\frac{\beta}{2} + \beta = \frac{\beta}{2}$.

D'où $x + y \in \mathscr{C}_+$. D'autre part on a $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n y_n = 0$. D'où $xy \in \mathscr{C}_0$.

1.3.3. Proposition

Soient $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ deux éléments de $\mathscr{C}$. Si x et y sont équivalentes modulo $\mathscr{C}_0$ et $x \in \mathscr{C}_+$ alors $y \in \mathscr{C}_+$.

Démonstration — $y - x \in \mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}_+$ et $x \in \mathscr{C}_+$ impliquent $y = (y - x) + x \in \mathscr{C}_+$.

REMARQUE

Il résulte de la proposition 1.3.2 que si $x \in \mathscr{C}_+$ et si y est un élément de la classe $\overline{x}$ de x dans $\mathbb{R}$, alors $y \in \mathscr{C}_+^*$. On dit que le nombre réel $\overline{x}$ est strictement positif. On peut vérifier que si $x' \in \mathscr{C}_-^*$ et $y' \in \overline{x'}$, alors

$y' \in \mathscr{C}_-^*$, on dit que $\overline{x'}$ est un nombre réel strictement négatif. Il est clair que si $x \in \mathscr{C}_0$, alors $\overline{x} = 0$ est le nombre réel non nul. On note :

$\mathbb{R}_+^* = \mathscr{C}_+^*/\mathscr{C}_0$ l'ensemble des réels strictement positifs.

$\mathbb{R}_-^* = \mathscr{C}_-^*/\mathscr{C}_0$ l'ensemble des réels strictement négatifs.

$\mathbb{R}_+ = \mathscr{C}_+/\mathscr{C}_0$ l'ensemble des réels positifs.

$\mathbb{R}_- = \mathscr{C}_-/\mathscr{C}_0$ l'ensemble des réels négatifs.

On a : $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.

1.3.4. Proposition

La relation $\leq$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$ est une relation d'ordre total compatible avec la structure de corps de $\mathbb{R}$ qui prolonge l'ordre naturel de $\mathbb{Q}$.

Démonstration — Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $y - x \in \mathbb{R}_+$ et $x - y \in \mathbb{R}_+$.

On a alors $y - x = -(x - y) \in \mathbb{R}_-$, donc $y - x \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-$. Ce qui entraîne $y - x = 0$, donc $x = y$.

Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que $y - x \in \mathbb{R}_+$ et $z - y \in \mathbb{R}_+$.

Alors $z - x = (z - y) - (y - x) \in \mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a $y - x \in \mathbb{R}_+$ ou $x - y \in \mathbb{R}_-$, ce qui entraîne $y \leq x$ ou $x \leq y$. Si x, x', y et y' sont des réels tels que $y - x \in \mathbb{R}_+$ ou $y' - x' \in \mathbb{R}_+$, alors $(y + y') - (x + x') = (y - x) + (y' - x') \in \mathbb{R}_+$.

Si x et x' sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}_+$ et $x' \in \mathbb{R}_+$, alors $xx' \in \mathbb{R}_+$. De plus il est clair que si a et b sont deux éléments de $\mathbb{Q}$ tels que $a \leq b$ dans $\mathbb{Q}$, alors $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$.

1.3.5. Proposition

La valeur absolue d'un nombre réel a est le nombre réel positif $|a| = \operatorname{Sup}(a, -a)$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on vérifie les propriétés suivantes :

1) $-|a| \leq a \leq |a|$

2) $|-a| = |a|$

3) $|a + b| \leq |a| + |b|$

4) $|ab| = |a||b|$

5) $|a| = 0 \iff a = 0$

1.4. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ Axiome d'Archimède

1.4.1. Théorème (Axiome d'Archimède)

Pour tout réel a, il existe un entier m tel que $m > a$.

Démonstration — Soit (x_n) un élément de $\mathscr{C}$ représentant a. La suite (x_n) étant bornée dans $\mathbb{Q}$, il existe $M = \frac{p}{q} \in \mathbb{R}$ et $M \geq 0$ ($p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) tel que $q|x_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(M - x_n)_n$ est une suite de rationnels positifs ou nuls, sa classe à savoir $M - a$ est positif ou nul dans $\mathbb{R}$. On a donc $\frac{p}{q} \geq a$, d'où $p \geq a$, car $p \geq \frac{p}{q}$. En prenant $m = p + 1$, on a $m > a$.

Corollaire 1 — Pour tout nombre réels a, b avec $a > 0$, il existe un entier p tel que $pa > b$.

Démonstration — Il existe un entier p tel que $p > \frac{b}{a}$, donc $pa > b$.

Corollaire 2 — Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel $\alpha > 0$ tel que $0 < \alpha < \varepsilon$.

Démonstration — Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p\varepsilon > 1$, donc, en posant $\alpha = \frac{1}{p}$, on a $0 < \frac{1}{p} < \varepsilon$.

1.4.2. Proposition

Pour tout nombre réel x et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier p unique satisfaisant à :

$$p\varepsilon \leq x < (p+1)\varepsilon$$

Démonstration — Il résulte du corollaire 1 du théorème 1.4.1 qu'il existe un entier n tel que $n\varepsilon \geq |x|$, soit $-n\varepsilon \leq x \leq n\varepsilon$. L'ensemble $B = \{m \in \mathbb{Z} \ / \ m\varepsilon \leq x\}$ est donc non vide, car $-n \in B$, et est majoré par n. Soit p le plus grand élément de B. On a $p\varepsilon \leq x < (p+1)\varepsilon$. Soit p' autre entier vérifiant $p'\varepsilon \leq x < (p'+1)\varepsilon$. On a alors les inégalités : $p'\varepsilon \leq x < (p+1)\varepsilon$ et $p\varepsilon \leq x < (p'+1)\varepsilon$ qui entraînent les inégalités $p' \leq p$ et $p \leq p'$, d'où $p = p'$.

1.4.3. Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *partie entière* de x l'unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x < p + 1$. On note

$$p = E(x) \quad \text{ou} \quad p = [x].$$

1.4.4. Proposition (Théorème de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

Démonstration — Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q(y - x) > 1$ et soit p l'unique entier satisfaisant : $p \cdot \frac{1}{q} \leq x < (p+1) \cdot \frac{1}{q}$. On a alors

$$x < \frac{p+1}{q} \text{ et } q\left(y - \frac{p}{q}\right) > 1, \text{ ce qui entraîne } x < \frac{p+1}{q} \text{ et } y > \frac{p+1}{q},$$

d'où $x < \dfrac{p+1}{q} < y$. Il suffit de prendre $r = \dfrac{p+1}{q}$.

Corollaire — Il existe entre deux réels distincts une infinité de nombres rationnels.

1.4.5. Proposition

Entre deux rationnels distincts il existe un irrationnel.

Démonstration — Soient x et y deux rationnels, $x < y$, et soit s un nombre irrationnel strictement positif (par exemple $s = e$). Il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q(y - x) > s$. On a alors

$$x < x + \frac{s}{q} < y \quad \text{et } x + \frac{s}{q} \text{ est irrationnel.}$$

1.4.6. Définition

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si entre deux éléments distincts quelconques dans $\mathbb{R}$, il existe un élément de A. Ainsi $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 2 : LIMITE ET CONTINUITÉ

Introduction

Le concept fondamental de l'analyse est le concept d'approximation : soit ε un nombre réel strictement positif. On dit que le réel x est une approximation de x_0 à ε près si $|x - x_0| < \varepsilon$. Si ε est assez petit (selon la précision souhaitée), on dira alors que x est voisin de x_0 et on notera $x \sim x_0$. Pour obtenir des énoncés mathématiques, il faut toujours indiquer à quelle précision un nombre est voisin d'un autre. De même on dira qu'un sous ensemble S de $\mathbb{R}$ est arbitrairement voisin d'un réel x_0, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in S$, qui approxime x_0 à ε près.

Soit une fonction réelle de la variable réelle $f : S \to \mathbb{R}$ où S est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ arbitrairement voisin de x_0. Peut-on approcher le nombre $f(x)$ pour $x \in S$ et voisin de x_0? La première idée est de dire que si $x \sim x_0$ alors $f(x) \sim l$ où l une constante réelle. Cela revient à approcher la fonction f par une constante : ce qui conduit au concept de limite de f au point x_0. Si f est définie en x_0 et $l = f(x_0)$, on a alors la notion de continuité de f en x_0. Dans les autres chapitres on cherchera à améliorer l'approximation de f par une fonction affine (notion de dérivée), ou une fonction polynôme (développements limités).

La définition de la continuité, exprimée en termes de propriétés du système des nombres réels, a été formulée pour la première fois par le mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Sa définition, encore utilisée de nos jours, est plus facilement explicitée grâce au concept de limite que nous abordons d'abord dans la première partie de ce chapitre.

2.1. Sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$ Intervalles de $\mathbb{R}$

2.1.1. Définition

Un sous ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit majoré (respectivement minoré) s'il existe un nombre réel A tel que :

$$\forall x \in E, x \leq A \qquad \text{(resp. } x \geq A\text{)}$$

A s'appelle un majorant (resp. un minorant) de E ; E est dit borné s'il est majoré et minoré.

2.1.2. Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}$; une borne supérieure de E est un majorant M de E tel que, pour tout majorant A de E, on a $A \geq M$.

De même une borne inférieure de E est un minorant m de E tel que, $a \leq m$ pour tout minorant a de E.

2.1.3. Remarque

Si E admet une borne supérieure M (resp une borne inférieure m), alors M (resp m) est unique.

En effet, soit M' une autre borne supérieure, comme M est un majorant, $M \geq M'$, comme M' est un majorant, $M' \geq M$ d'où $M = M'$. On démontre de la même manière l'unicité de m. On notera alors: $M = \sup E$; $m = \inf E$.

La définition 2.1.2 est équivalente à la définition suivante.

2.1.4. Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}$. M est la borne supérieure de E si et seulement si

i) $\forall x \in E, x \leq M$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x > M - \varepsilon$.

De même m est la borne inférieure de E si et seulement si :

i) $\forall x \in E, x \geq m$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x < m + \varepsilon$.

2.1.5. Définition

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dira que f est majorée (resp. minorée) sur E, si $f(E)$ est majoré (resp. minoré) dans $\mathbb{R}$.

La borne supérieure M (resp. la borne inférieure m) de f sur E est la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de $f(E)$, si elle existe.

Notation : $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$; $m = \inf\limits_{x \in E} f(x)$.

2.1.6. Exemples

1) L'ensemble des entiers positifs n'est pas majoré (proposition 2.1.8), par contre il est minoré et 0 est sa borne inférieure.

2) $E = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ *et* $x^2 < 2\}$ *est bornée:* $0 = \inf E$, *et* $\sqrt{2} = \sup E$. *On remarque que la borne supérieure* $\sqrt{2}$ *n'appartient pas à* E.

3) $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ *est borné. 1 est la borne supérieure et 0 est la borne inférieure qui n'appartient pas à* E.

2.1.7. Propriété fondamentale

L'ensemble des nombres réels possède une propriété fondamentale, que ne vérifie pas l'ensemble des nombres rationnels, et qu'on admettra dans la suite :

— tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ majoré admet une borne supérieure;

— tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ minoré admet une borne inférieure.

Comme application de la propriété 2.1.7, on a la proposition suivante :

2.1.8. Proposition

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$. En particulier si $a \in \mathbb{R}$ est tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq a < \frac{1}{n}, \qquad \text{alors } a = 0$$

Démonstration — Supposons qu'il existe un nombre réel b majorant $\mathbb{N}$.

On aura $b \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après 2.1.7, $\mathbb{N}$ admet une borne supérieure $M > 0$ comme $1 > 0$, on a $M < M + 1$.

Donc $M - 1 < M$ et $M - 1$ n'est pas un majorant ; donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M - 1 < n_0$; d'où $M < 1 + n_0$. Comme $1 + n_0 \in N$; on a la contradiction.

— Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq a < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; si $a \neq 0$, alors $n < \frac{1}{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ce qui est impossible d'après ce qui précède.

En particulier si $a \in \mathbb{R}_+$ est tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $a < \varepsilon$, alors $a = 0$. Nous aurons à utiliser ce résultat à maintes reprises par la suite.

2.1.9. Définition

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des formes suivantes :

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$; $\quad [a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$;

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$; $\quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$;

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$; $\quad]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$;

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$; $\quad]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$; $\quad \mathbb{R}$; $\emptyset$.

Un intervalle peut être caractérisé par une propriété locale comme le montre l'énoncé suivant :

2.1.10. Proposition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si

$$\forall a \in I, \forall b \in I, \quad a < b \Rightarrow [a, b] \subseteq I. \tag{1}$$

Démonstration — Supposons $I \neq \emptyset$. La condition (1) est évidemment nécessaire d'après 2.1.9 ; elle est suffisante : en effet si I n'est ni majoré, ni minoré, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $a, b, \in I$ tels que $a < x < b$, donc d'après (1) $x \in I$ et $I = \mathbb{R}$. Si I est majoré et non minoré, soit $b = \sup I$; pour tout $x < b$ il existe alors $a, c \in I$, tels que $a < x < c \leq b$, donc $x \in I$, et I ne peut être que $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, b[$.

Par un raisonnement analogue on montre que si I est minoré et non majoré $I =]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$, où $a = \inf I$.

Si I est majoré et minoré le même argument montre que I a l'une des formes suivantes : $[a, b]$; $]a, b[$; $]a, b]$; $[a, b[$ avec $a = \inf I, b = \sup I$.

2.1.11. Extrémités et points intérieurs d'un intervalle

2.1.11.1. Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *extrémités de* I, $\inf I$ et $\sup I$, quand ils existent.

Un point $x_0 \in I$ est *un point intérieur de* I si et seulement si :

$\exists \alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$. On note $\overset{\circ}{I}$ l'ensemble des points intérieurs de I. On dira que I est *ouvert* si et seulement si : $I = \overset{\circ}{I}$.

2.1.11.2. Propriétés

On établit facilement les propriétés suivantes :

1) Les extrémités de I, quand elles appartiennent à I, ne sont pas des points intérieurs de I.

2) Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $I \subset J$, alors $\overset{\circ}{I} \subset \overset{\circ}{J}$.

3) Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, il en est de même de $\overset{\circ}{I}$.

4) $\overset{\circ}{I} = I -$ (les extrémités de I).

2.2. Limites

2.2.1. Définition

On appelle voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$ de rayon $\alpha > 0$, et on note $V_\alpha(x_0)$, l'intervalle ouvert centré en x_0 : $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.

2.2.2. Définition

Soit S un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dira que S est arbitrairement voisin de x_0, et on notera $S \sim x_0$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in S$ tel que $|x - x_0| < \varepsilon$.

En d'autres termes :

$$S \sim x_0, \Leftrightarrow \forall \alpha > 0. \quad S_\alpha = S \cap V_\alpha(x_0) \neq \emptyset.$$

S_α s'appelle la *trace* dans S du voisinage $V_\alpha(x_0)$

2.2.3. Remarques

1) S est arbitrairement voisin de chacun de ses points. Un point $x \in S$ tel qu'il existe $V_\alpha(x)$, vérifiant $V_\alpha(x) \cap S = \{x\}$ s'appelle un point isolé de S.

2) Si $S \sim x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, tout sous ensemble S' de S n'est pas nécessairement arbitrairement voisin de x_0. Par contre si S' est la trace dans S d'un voisinage de x_0, alors $S' \sim x_0$.

2.2.4. Définition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, S une partie de $\mathbb{R}$ arbitrairement voisine de x_0, et $f : S \to \mathbb{R}$ une application. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dira que $f(x)$ a pour limite l quand x tend vers x_0, en restant dans S, si et seulement si :

$$\boxed{\forall V_\varepsilon(l), \exists V_\delta(x_0) \quad \text{tel que } f\left(S \cap V_\delta(x_0)\right) \subset V_\varepsilon(l)}$$

ou en faisant intervenir les rayons des voisinages :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \left(|x - x_0| < \delta, \text{et } x \in S \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)}$$

Ce qu'on notera par :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l \qquad \text{ou } f(x) \to l \quad \text{quand } x \to x_0$$

en omettant S, si le contexte ne laisse pas d'ambiguïté à ce sujet.

2.2.5. Remarques

1) Dans la définition 2.2.4 $V_\varepsilon(l)$ est en premier lieu spécifié : $V_\delta(x_0)$ pouvant alors dépendre de $V_\varepsilon(l)$.

2) La notion de limite de f en x_0 dépend de l'ensemble S. Toutefois :

2.2.6. Proposition

Soit $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, S \sim x_0$. Soit S' un sous-ensemble de S, tel que $S' \sim x_0$ si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S'}} f(x) = m$$

alors $l = m$. En particulier si f admet une limite en x_0, cette limite est unique.

Démonstration

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0 : \begin{cases} |x - x_0| < \delta_1 \\ x \in S \end{cases} \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de même

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S'}} f(x) = m \Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : \begin{cases} |x - x_0| < \delta_2 \\ x \in S' \end{cases} \Rightarrow |f(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. Si $|x - x_0| < \delta$, avec $x \in S'$ alors

$$|l - m| \leq |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ainsi $|l - m| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $|l - m| = 0$ (Proposition 2.1.8) et $l = m$.

2.2.7. Proposition

Soit $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, S \sim x_0$

et $S_\alpha = S \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[. \alpha > 0$. Alors:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S_\alpha}} f(x) = l.$$

Démonstration

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall V_\varepsilon(l). \exists V_\delta(x_0), f(S \cap V_\delta(x_0)) \subseteq V_\varepsilon(l).$$

Puisque $S_\alpha \sim x_0, S_\alpha \cap V_\delta(x_0) \neq \emptyset$ et

$f(S_\alpha \cap V_\delta(x_0)) \subseteq f(S \cap V_\delta(x_0)) \subseteq V_\varepsilon(l)$

d'où $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S_\alpha}} f(x) = l$. Réciproquement on a,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S_\alpha}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall V_\varepsilon(l). \exists V_{\delta_1}(x_0), f(S_\alpha \cap V_{\delta_1}(x_0)) \subseteq V_\varepsilon(l).$$

Soit $\delta_2 = \inf(\alpha, \delta_1)$,

$$S \cap V\delta_2(x_0) = S_\alpha \cap V\delta_2(x_0) \subseteq S_\alpha \cap V_{\delta_1}(x_0)$$

et par suite

$$f(S \cap V\delta_2(x_0)) \subseteq V_\varepsilon(l)$$

donc: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l$.

2.2.8. Remarques et exemples

1) Pour chercher la limite de $f(x)$ au point $x_0, x_0 \in S$ et $S \sim x_0$, on pourra se restreindre à la trace S' d'un voisinage de x_0 sur S.

2) Si $f(x) \to l$ quand $x \to x_0$, $x \in S$, alors pour tout sous-ensemble S' de S tel que $S' \sim x_0$ on a: $f(x) \to l$ quand $x \to x_0$, $x \in S'$.

La réciproque n'est pas vraie en général. En effet soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

alors pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{\substack{x \to q \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = 1$, alors que $\lim\limits_{\substack{x \to q \\ x \in \mathbb{R}}} f(x)$ n'existe pas. En effet, on sait que tout intervalle ouvert non vide contient au moins un nombre irrationnel ; d'où pour tout $\alpha > 0$, $f(\mathbb{R} \cap V_\alpha) = f(V_\alpha) = \{0, 1\}$.

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $f(V_\alpha(q)) \not\subset]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[= V_{\frac{1}{2}}(1)$, $\forall \alpha > 0$. D'où $\lim\limits_{\substack{x \to q \\ x \in \mathbb{R}}} f(x)$ n'existe pas, car elle serait égale à 1 d'après la proposition 2.2.6.

3) Soient : $S^+ = \{x \in S, x > x_0\}$, $S^- = \{x \in S, x < x_0\}$. *Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S^+}} f(x) = l_1$ on dira que l_1 est la limite à droite de $f(x)$ en x_0, et on écrira :* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$.

De même si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S^-}} f(x) = l_2$, on dira que l_2 est la limite à gauche de $f(x)$ en x_0 et on écrira : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) \text{ existe } \Leftrightarrow l_1 \text{ et } l_2 \text{ existent et } l_1 = l_2.$$

4) Si $f(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ pour tout x_0 de $\mathbb{R}$.

Si $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$ pour tout x_0 de $\mathbb{R}$.

5) Il arrive en général que la limite à droite en x_0 soit différente de la limite à gauche de x_0, les deux limites étant elles-mêmes différentes de la valeur de la fonction en x_0. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ x - 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

On a :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1; \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1; \ f(0) = 0.$$

6) Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l$, alors il existe $k > 0$ et un voisinage $V(x_0)$ de x_0, tels que : $\forall x \in V(x_0) \cap S$, $|f(x)| \leq k$.

On dira alors que f est bornée « au voisinage » de x_0.

En effet : pour $\varepsilon = 1$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta$, $x \in S$, $|f(x) - l| < 1$ d'où $|f(x)| < |l| + 1$.

Cette remarque peut servir pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point ; il suffit de montrer qu'elle n'est bornée dans aucun voisinage de ce point. Ainsi la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

2.2.9. Limite en $+\infty$ et $-\infty$

Soit $S \subseteq \mathbb{R}$, contenant des nombres positifs aussi grands que l'on veut, c'est-à-dire: pour tout $A > 0$, il existe $x \in S$ tel que $x > A$. On notera $S \sim +\infty$.

Soit $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On veut définir la limite de $f(x)$ quand x devient très grand en restant dans S (on écrira $x \to +\infty$, $x \in S$). On suppose que tous les éléments de S sont strictement positifs. Soit $S_1 = \{\frac{1}{x},\ x \in S\}$, alors $S \sim +\infty$ entraîne $S_1 \sim 0$.

Posons $X = \frac{1}{x}$ et $g(X) = f\left(\frac{1}{X}\right) = f(x)$. $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X \in S_1}} g(X) = l$ équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (0 < X < \delta, X \in S_1) \Rightarrow |g(X) - l| < \varepsilon,$$

ou encore en posant $X = \frac{1}{x}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A = \frac{1}{\delta} > 0,\ (x > A, x \in S) \Rightarrow |f(x) - l| = \left|g(\frac{1}{x}) - l\right| < \varepsilon,$$

d'où :

2.2.9.1. Définition

$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} f(x) = l$ si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ x > A \text{ et } x \in S \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Remarque : On peut étendre la définition 2.2.9.1 à une fonction

$$f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad S \sim +\infty,$$

même si S contient des nombres négatifs ou nuls. En effet par un raisonnement analogue à 2.2.7, en considérant $S_A = [A, +\infty[\cap S$, $A > 0$, on montrera facilement que :

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S_A}} f(x) = l. \tag{1}$$

Autrement dit la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ ne dépend que des valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, $x \in S$.

De même, soit $S \subseteq \mathbb{R}$, posons $S' = \{-x, x \in S\}$. On dira que $S \sim -\infty$ si et seulement si $S' \sim +\infty$.

2.2.9.2. Définition

Soit $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $S \sim -\infty$. Posons $X = -x$ et $g(X) = f(-x)$

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \in S}} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{X \to +\infty \\ X \in S'}} g(X) = l.$$

Par un même raisonnement que dans 2.2.9.1 on obtient :

2.2.9.3. Définition

$\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \in S}} f(x) = l$, si et seulement si :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, tel que si $x < -A$ et $x \in S$, on a : $|f(x) - l| < \varepsilon$.

2.2.9.4. Remarques

Les définitions 2.2.9.1 et 2.2.9.2 ramènent la définition de limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$, à celle d'une fonction en 0. Donc tous les théorèmes qui vont suivre sur les limites en $x_0 \in \mathbb{R}$ seront valables pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$. En particulier la proposition 2.2.6 et la remarque 2.2.8, 6) s'énoncent ainsi pour $+\infty$ par exemple :

2.2.9.5. Proposition

Si $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} f(x) = l$, alors l est unique.

En outre, il existe $k > 0$ et $A > 0$, tels que si $x > A$, $x \in S$, alors $|f(x)| \leq k$. On dira alors que f est bornée au « voisinage » de $+\infty$.

2.2.10. Limite d'une suite

Un cas important est celui où $S = \mathbb{N}^*$: Une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ est appelée une suite. En posant $f(n) = x_n$, une suite de nombres réels sera alors notée par $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ ou simplement (x_n). La notion de suite extraite d'une autre suite jouera un rôle important dans la suite.

2.2.10.1. Définition

Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ une suite de nombres réels : une suite extraite de f est un suite $f \circ \varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ où φ est application strictement croissante de $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$.

Notation : Si $f(n) = x_n$, on notera $(f \circ \varphi)(k) = x_{\varphi(k)} = x_{n_k}$, où $\varphi(k) = n_k$.

2.2.10.2. Remarques

1) Si $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est strictement croissante alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout n.

Faisons un raisonnement par récurrence :

Pour $n = 1$, $\varphi(1) \geq 1$; supposons $\varphi(n) \geq n$, dans ce cas :

$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n \Rightarrow \varphi(n+1) \geq n + 1$. D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) \geq n$.

2) pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 > A$. D'après 2.2.9, $\mathbb{N}^* \sim +\infty$ et on peut parler de limite d'une suite quand n devient grand.

2.2.10.3. Définition

Soit (x_n) une suite de nombres réels définie par l'application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. On dira que la suite (x_n) admet une limite l quand n devient grand et on écrira :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = l, \text{ si et seulement si, } \lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} f(n) = l.$$

2.2.10.4. Remarque

Ainsi d'après 2.2.9.1, $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : \text{si } n > A, \text{on a } |x_n - l| < \varepsilon.$$

Or il existe $n_0 \in N^*$ tel que $n_0 > A$; par suite si $n \geq n_0$ on a $|x_n - l| < \varepsilon$.

On peut alors remplacer A par n_0. On a donc :

2.2.10.5. Définition

Soit (x_n) une suite de nombres réels

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que si } n \geq n_0, \text{ alors } |x_n - l| < \varepsilon}$$

2.2.10.6. Remarques

1) Si $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$, *on dira que la suite* (x_n) *est convergente, de limite* l

2) D'après 2.3.10.2, la définition de la limite d'une suite est ramenée à celle d'une fonction en $+\infty$. *Toutes les propriétés énoncées pour les limites de fonctions restent vraies pour les suites. On aura donc :*

$$\text{si } \lim_{n \to +\infty} x_n = l, \text{ alors } l \text{ est unique.}$$

En outre il existe $k > 0$, *et* $n_0 > 0$, *tels que si* $n \geq n_0$, $|x_n| \leq k$. *Ainsi une suite convergente est bornée.*

3) *Exemple :* Montrons que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{nx} = 0$ pour tout x, $x \neq 0$ fixé.

Soit $x > 0$: pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon x$. Donc si $n \geq n_0$ on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon x$ et par suite $\frac{1}{nx} < \varepsilon$. On fait un raisonnement analogue pour $x < 0$.

Les propositions qui suivent établissent les propriétés fondamentales des limites pour les sommes, les produits, les quotients, les inégalités de fonctions ainsi que pour les fonctions composées.

2.2.11. Propriétés fondamentales

2.2.11.1. Proposition :

Soient $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $S \sim x_0$, $f : S \to \mathbb{R}$ et $g : S \to \mathbb{R}$, telles que :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} g(x) = m$$

alors :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} (f+g)(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} (f(x) + g(x)) = l + m.$$

Démonstration — Soit $\varepsilon > 0$; comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $\exists \delta_1 > 0$:

$$\forall x \in S, \left(|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

De même $\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in S. \left(|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Posons $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. Si $|x - x_0| < \delta, x \in S$. on a :

$$|f(x) + g(x) - l - m| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +x_0} (f+g)(x) = l + m$.

2.2.11.2. Remarque

Dans la démonstration de la proposition 2.3.11.1 nous avons utilisé le principe suivant: si une inégalité est vérifiée pour $|x - x_0| < \delta_1$ et une autre a lieu pour $|x - x_0| < \delta_2$, soit $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$; alors pour $|x - x_0| < \delta$ les deux inégalités sont vérifiées simultanément. Dans les preuves qui vont suivre, on utilisera souvent ce principe. On passera directement à δ, sans mentionner les $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$ intermédiaires.

2.2.11.3. Proposition

Soient $S \subset \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ et $g : S \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$.

si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m$

alors : $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = lm$

Démonstration

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \delta$. $x \in S$ on a :

$$|f(x) - l| < \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|m| + 1} \qquad \text{car} \quad \lim_{x \to +x_0} f(x) = l$$

$$|g(x) - m| < \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|l| + 1} \qquad \text{car} \quad \lim_{x \to +x_0} g(x) = m$$

$|f(x)| < |l| + 1$ (remarque 2.2.8, 6)

d'où

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - lm| &= |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \\
&\leq |f(x)|\ |g(x) - m| + |m|\ |f(x) - l| \\
&\leq (|l| + 1)\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|l| + 1} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|m| + 1}|m| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

2.2.11.4. Corollaire

Soient $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, alors $\lim_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$.

2.2.11.5. Exemple

Soient $P(x)$ un polynôme en x, et $x_0 \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

En effet $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout p, $0 \leq p \leq n$.

$$\lim_{x \to x_0} x^p = x_0^p \qquad \text{(proposition 2.2.11.3)}$$

et

$$\lim_{x \to x_0} a_p x^p = a^p x_0^p \qquad \text{(corollaire 2.2.11.4)}$$

d'où

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) \qquad \text{(proposition 2.2.11.1)}$$

2.2.11.6. Remarque

Soient $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \neq 0$, alors : pour $\varepsilon = \left|\frac{l}{2}\right|$, il existe $\delta > 0$, tel que:

si $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - l| < \left|\frac{l}{2}\right|$,

d'où $\qquad |f(x)| \geq |l| - \left|\frac{l}{2}\right| = \left|\frac{l}{2}\right| > 0.$

Ainsi si $\lim f(x) = l \neq 0$ alors $f(x)$ ne s'annule pas pour les points de S voisins de x_0.

2.2.11.7. Proposition

Soient $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$,

$$\text{si } \lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ et } l \neq 0, \quad \text{alors : } \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$$

Démonstration — Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \delta$, $x \in S$ on a :

$$|f(x) - l| < \left|\frac{l}{2}\right| \text{ et } |f(x) - l| < \varepsilon \left|\frac{l}{2}\right|^2 \tag{1}$$

D'après la remarque 2.2.11.6 on peut choisir δ tel que $f(x) \neq 0$ pour $|x - x_0| < \delta$, $x \in S$.

$$(1) \Rightarrow |f(x)| \geq \left|\frac{l}{2}\right| ;$$

par suite:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| &= \frac{|l - f(x)|}{|f(x)l|} \\ &\leq \frac{2}{|l|} \frac{|l - f(x)|}{|l|} \\ &\leq \frac{2}{l^2} \frac{\varepsilon l^2}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2.2.11.8. Corollaire

Soient $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, et $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \neq 0$ alors: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$.

2.2.11.9. Exemples

1) Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes en x, $x_0 \in \mathbb{R}$, tels que $Q(x_0) \neq 0$.

Comme $\lim_{x \to x_0} Q(x) = Q(x_0) \neq 0$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

2) Montrons que $\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = 0$. On peut se restreindre au cas où $S =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (2.2.8, 1)

On peut facilement démontrer géométriquement, en considérant le cercle trigonométrique, que :

$$|\sin x| \leq |x|. \tag{1}$$

De $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ et (1) on déduit

$$|\cos x - 1| = 2\left|\sin^2 \frac{x}{2}\right| \leq \frac{x^2}{2} \tag{2}$$

Pour $\varepsilon > 0$, soit $\delta_1 = \varepsilon$; si $|x| < \delta_1$,

$$\text{alors } |\sin x| \leq |x| < \varepsilon, \text{ d'où } \lim_{x \to 0} \sin x = 0.$$

De même soit $\delta_2 = \sqrt{2\varepsilon}$: si $|x| < \delta_2$

$$\text{alors } |\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2} < \frac{\delta_2^2}{2} = \varepsilon, \quad \text{d'où } \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Par suite d'après le corollaire 2.3.11.8

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{tg}(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{2} = 0.$$

2.2.11.10. Proposition

Soient $S \subseteq \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$ et soit $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction positive. Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut l, alors $l \geq 0$.

Démonstration — Supposons $l < 0$; soit $\varepsilon = \dfrac{|l|}{2}$.

$\exists \delta > 0$ tel que $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap S$ entraîne $f(x) \in]l - \frac{|l|}{2}, l + \frac{|l|}{2}[$.

$l + \dfrac{|l|}{2} = \dfrac{l}{2} < 0$ implique $f(x) < 0$ $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap S$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Corollaire — Soit $S \sim x_0$ et soient $f : S \to \mathbb{R}$ et $g : S \to \mathbb{R}$ deux fonctions sur S telles que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in S$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, alors $l \leq m$.

Démonstration — La fonction $\varphi = g - f$ étant positive sur S, la proposition précédente entraîne $\lim_{x \to x_0} \varphi = m - l \geq 0$. D'où le résultat.

2.2.11.11. Remarque

Soient $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$, $f : S \to \mathbb{R}$, $g : S \to \mathbb{R}$, et $h : S \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, pour $x \in S_\alpha$, $(S_\alpha = V_\alpha(x_0) \cap S)$, si $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} (x) = l$, alors : $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$.

Démonstration — Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$, $\left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{4}\right)$

$$\text{et} \qquad \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - l| < \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Par suite

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - l| + |g(x) - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

D'où

$$|h(x) - l| \leq |h(x) - f(x)| + |f(x) - l| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - l| < \varepsilon.$$

2.2.11.12. Exemple

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

On peut se restreindre au sous ensemble $S =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: comme $\frac{\sin x}{x}$ est paire, on peut se restreindre à $S_1 =]0, \frac{\pi}{2}[$: en effet si $\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$, alors $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Considérons la figure suivante :

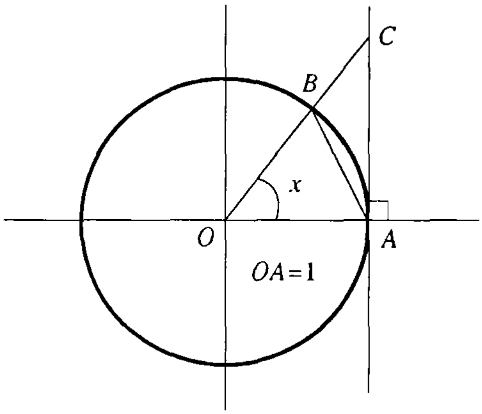


FIGURE: 2.1

On a pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{aligned}
\text{surface du triangle } AOB &< \text{surface du secteur circulaire } AOB \\
&< \text{surface du triangle } OAC \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \\
&\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \sin x > 0 \\
&\Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x, \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \to 0+} \cos x = 1$ et $\lim_{x \to 0+} 1 = 1$, on a $\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2.2.11.13. Proposition

Soient $f : S \to \mathbb{R}$, $g : T \to \mathbb{R}$ telle que $f(S) \subseteq T$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $S \sim x_0$.

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et $T \sim y_0$, et si $\lim_{y \to y_0} g(y) = l$, alors : $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$.

Démonstration — Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, $|y - y_0| < \delta$ et $y \in T$ entraînent (1) $|g(y) - l| < \varepsilon$; d'autre part il existe $\delta_1 > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \delta_1$ et $x \in S$, on a $|f(x) - y_0| < \delta$. D'où $|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x)) - l| < \varepsilon$.

2.2.11.14. Proposition

Soit $f : S \to \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $S \sim x_0$.

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de S convergeant vers x_0, la suite $f(x_n)$ converge vers l.

Démonstration — Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et soit $g = \mathbb{N}^* \to S$ une suite telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(n) = x_0$.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left[g(n)\right] = l$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$. (2.2.11.13)

Réciproquement supposons que pour toute suite (x_n) convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))$ converge vers l. Démontrons (par l'absurde) que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Supposons le contraire. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in S$ tel que $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. La suite (x_n) ainsi construite converge vers x_0, alors que la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers l, ce qui contredit l'hypothèse.

2.2.11.15. Exemples

1) Soit $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. *Montrons que* $f(x)$ *n'a pas de limite en 0.*

Soient les suites (x_n), (y_n) telles que $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

$$\text{or } f(x_n) = \sin n\pi = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$$

$$f(y_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = 1$$

d'après 2.2.11.14, $f(x)$ n'a pas de limite en 0.

2) Soit $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. *Montrons que* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Comme $f(x)$ est paire on peut se restreindre à $\mathbb{R}_+ - \{0\}$. Or

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x, \ (x > 0)$$

d'où d'après la proposition 2.2.11.11 $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

2.3. Application aux suites

En appliquant les résultats du 2.2 aux suites, on obtient :

2.3.1. Proposition

Soit (x_n) une suite convergente de limite l, alors :

a) l est unique.

b) $\exists k > 0, \exists n_0 > 0 : n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| \leq k$.

c) Si $l \neq 0, \exists n_0 > 0 : n \geq n_0 \Rightarrow x_n \neq 0$.

2.3.2. Proposition

Soient (x_n) et (y_n) deux suites convergentes de limites respectives l et m. Dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = l + m \,; \quad \lim_{n\to+\infty}(x_n y_n) = lm$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda x_n) = \lambda l \,; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m} \text{ si } m \neq 0.$$

2.3.3. Proposition

Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites telles que : $\exists n_0 > 0$, tel que pour $n \geq n_0$: $x_n \leq z_n \leq y_n$.

$$\text{si } \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = l, \quad \text{alors : } \lim_{n\to+\infty} z_n = l.$$

2.3.4. Suites monotones de nombres réels

2.3.4.1. Définition

Une suite (x_n) est dite *croissante* si $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Une suite (x_n) est dite *décroissante* si $x_n \geq x_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Une suite est appelée *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Les suites monotones sont agréables à étudier, car leur convergence ou leur divergence est facile à déterminer. En fait on a :

2.3.4.2. Proposition

Une suite monotone converge si et seulement si elle est bornée.

Démonstration — D'après la proposition 2.3.1 toute suite convergente est bornée.

Réciproquement soit (x_n) une suite monotone bornée. Supposons (x_n) croissante. (x_n) bornée équivaut à dire que le sous-ensemble $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ est majoré et minoré. Soit $L = \sup E$. Alors pour tout n, $x_n \leq L$.

D'après la définition de $\sup E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $x_{n_0} > L - \varepsilon$. Comme la suite est croissante, pour tout entier $n \geq n_0$, $x_n > L - \varepsilon$. D'où $|x_n - L| = L - x_n < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$ et par suite la suite (x_n) converge vers L.

Un raisonnement analogue s'applique dans le cas où (x_n) est décroissante en utilisant $l = \inf E$.

2.3.4.3. Remarque

Toute suite bornée n'est pas convergente comme le montre l'exemple $x_n = (-1)^n$. Toutefois de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.

2.3.4.4. Théorème (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration — Soit une suite (x_n), $x_n \in [a, b], a < b$, posons $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$, $n \in N^*$. $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots A_n \supset A_{n+1} \cdots$

A_n étant borné, soit $b_n = \inf A_n$; on a $b_n \leq b_{n+1}$, $\forall n \geq 1$; la suite (b_n) étant croissante et majorée, a une limite L.

Comme $b_n = \inf A_n$, $\forall \varepsilon > 0, \forall n, \exists m \geq n$ tel que $x_m < b_n + \varepsilon$ et $x_m \geq b_n$

Ainsi pour $\varepsilon = 1$, $\exists n_1 \geq 1$, $x_{n_1} < b_1 + 1$

pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2n_1}$, $\exists n_2 \geq 2n_1 > n_1$ tel que $x_{n_2} < b_{2n_1} + \dfrac{1}{2n_1}$,

pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2n_2}$, $\exists n_3 \geq 2n_2 > n_2$ tel que $x_{n_3} < b_{2n_2} + \dfrac{1}{2n_2}$,

pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2n_k}$, $\exists n_{k+1} \geq 2n_k > n_k$ tel que $x_{n_{k+1}} < b_{2n_k} + \dfrac{1}{2n_k}$.

L'application $k \to n_k$ est strictement croissante.

Comme $\lim b_n = L$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que, } n \geq n_0 \Rightarrow |b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit k_0 tel que $\dfrac{1}{k_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, et $k_1 \geq n_0$. Soit $k_2 = \sup(k_0, k_1)$; pour $k \geq k_2$, on a :

$$\begin{aligned}
|x_{n_k} - L| &\leq |x_{n_k} - b_{2n_k}| + |b_{2n_k} - L| \\
&\leq \frac{1}{2n_k} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{car } 2n_k > n_k \geq k \geq k_2 \geq n_0 \\
|x_{n_k} - L| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{car } \frac{1}{2n_k} < \frac{1}{k} < \frac{1}{k_2} < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Par suite (x_{n_k}) est une suite extraite de (x_n), convergeant vers L.

2.4. Suites de Cauchy

Une classe importante de suites convergentes dans $\mathbb{R}$ est constituée par les suites de Cauchy. En fait la propriété pour une suite d'être de Cauchy caractérise les suites convergentes dans $\mathbb{R}$.

2.4.1. Définition

Une suite (x_n) dans $\mathbb{R}$ est dite une suite de Cauchy si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon), n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, tel que si $p, q \geq n_0$, alors $|x_p - x_q| \leq \varepsilon$.

2.4.2. Propriétés des suites de Cauchy

2.4.2.1. Toute suite (x_n) convergente est une suite de Cauchy

En effet si $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que si $p, q \geq n_0$ on a : $|x_p - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|x_q - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$

D'où:

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - l| + |x_q - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ε étant quelconque, (x_n) est une suite de Cauchy.

2.4.2.2. Une suite de Cauchy est bornée dans $\mathbb{R}$

Si (x_n) est une suite de Cauchy, alors pour $\varepsilon = 1$, $\exists n_0(1) \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geq n_0$, on a $|x_n - x_{n_0}| \leq 1$.

D'où $|x_n| \leq |x_{n_0}| + 1$ pour tout $n \geq n_0$.

Si $M = \sup(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{n_0}|, |x_{n_0}| + 1)$, alors $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2.4.2.3. Si une suite de Cauchy (x_n) admet une suite extraite (x_{n_k}) convergente vers un point l, alors (x_n) converge vers l

Soit (x_n) est une suite de Cauchy : soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $p, q \geq n_0$ alors : $|x_p - x_q| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Supposons que $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k} = l$: $\exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $k \geq k_0$, $|x_{n_k} - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit $k_1 = \sup(n_0, k_0)$ alors pour $n \geq k_1$ on a :

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$.

Les résultats ci-dessous nous permettent d'énoncer l'important critère de Cauchy pour la convergence des suites de $\mathbb{R}$.

2.4.3. Théorème (critère de convergence de Cauchy)

Une suite de nombres réels (x_n) est convergente si et seulement si elle est une suite de Cauchy.

Preuve: si (x_n) est convergente, d'après 2.4.2.1, (x_n) est de Cauchy.

Réciproquement si (x_n) est une suite de Cauchy, elle est bornée d'après 2.4.2.2.

Mais d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, de la suite (x_n), on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) convergente. Donc d'après 2.4.2.3, la suite (x_n) converge vers la même limite que la suite (x_{n_k}).

2.4.4. Exemple

Soit la suite (x_n) définie par :

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \cdots, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}) \quad \text{pour } n > 2.$$

Cette suite n'est pas une suite monotone. Il est facile de voir que

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|; \quad \text{d'où } |x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Donc si $m \geq n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\
&\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} \\
&\leq \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^{n-2}} \leq \frac{1}{2^{n_0-2}}
\end{aligned}$$

Par suite pour $\varepsilon > 0$ donné, n_0 est tel que $\dfrac{1}{2^{n_0}} < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Pour $m \geq n \geq n_0$ on a $|x_m - x_n| < \varepsilon$. La suite (x_n) est donc une suite de Cauchy. D'après le théorème 2.4.3, (x_n) converge vers $x_0 \in \mathbb{R}$. De la relation de récurrence, il résulte que $x_0 = \frac{1}{2}(x_0 + x_0)$, ce qui ne donne aucune information sur x_0.

Pour calculer x_0, on peut considérer la suite d'ordre impaire extraite de (x_n).

$$x_1 = 1, x_3 = 1 + \frac{1}{2}, \cdots x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

d'où

$$\begin{aligned}
x_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}) \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{4^n}).
\end{aligned}$$

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \dfrac{4}{3}$. D'après 2.4.2.3, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{4}{3}$.

2.5. À RETENIR

— Soit $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $(S \sim x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : \ \forall x \in S,\ |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon.$

On notera $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0} f = l$.
l est unique et il existe un voisinage $V_\alpha(x_0)$ de x_0 tel que f est borné dans $V_\alpha(x_0) \cap S$.
Si $l \neq 0$, il existe $V_\alpha(x_0)$ tel que f ne s'annule pas sur $V_\alpha(x_0) \cap S$ et garde le même signe que l sur cet ensemble.
Sous réserve que les opérations soient définies, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x_0}(f+g) &= \lim_{x_0} f + \lim_{x_0} g \\
\lim_{x_0}(fg) &= (\lim_{x_0} f)(\lim_{x_0} f) \\
\lim_{x_0}(\lambda f) &= \lambda(\lim_{x_0} f) \\
\lim_{x_0}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\lim\limits_{x_0} f}{\lim\limits_{x_0} g}
\end{aligned}$$

— Une suite monotone converge si et seulement si elle est bornée.
— Une suite de nombres réels est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.

2.6. Exercices

1) Trouver les limites des fonctions suivantes en justifiant dans chaque cas les calculs

1.1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + 2a + a^2}, \cdots\ a \neq 0.$

1.2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$.

1.3) $\lim\limits_{h\to 0} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$.

2) En utilisant $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, trouver les limites des fonctions suivantes :

2.1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$ 2.2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{x}$

2.3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin x}$ 2.4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{x^2}$.

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

4) Soit g une fonction bornée sur $S \subset \mathbb{R}$ et $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

Montrer que : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+nx}$ existe, et trouver la limite.

6) (i) Soit $b > 1$, en écrivant $b = 1 + c$, $c > 0$, montrer que pour tout nombre réel B positif, il existe un entier n_0, tel que si $n \geq n_0$, $b^n > B$.

(ii) Soit $0 < x < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$.

(iii) Étudier le cas (ii) quand $-1 < x < 0$.

7) Pour quelles valeurs de x la limite suivante existe-t-elle :

$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$? Donner dans ce cas les valeurs de $f(x)$.

8) Pour $x \neq -1$, montrer que $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1}$ existe.

Calculer : $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(2)$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$?

9) Étudier les suites suivantes, et trouver les limites quand la suite converge.

1) $x_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$ 2) $x_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n}$

3) $x_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}$ 4) $x_n = \dfrac{n}{2^n}$

5) $x_1 = \sqrt{2}$ et pour $n > 1$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$

10) Soient (U_n) une suite croissante et (V_n) une suite décroissante telles que $\lim(V_n - U_n) = 0$. On dira alors que les deux suites sont adjacentes.

i) Montrer que la suite $W_n = V_n - U_n$ est décroissante et en déduire que $V_n - U_n \geq 0$ pour tout n.

ii) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et ont même limite.

Application — Montrer que la suite $U_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ est convergente (on considérera la suite $V_n = U_n + \frac{1}{n!}$).

2.7. Continuité en un point

2.7.1. Définition

Soit $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$,

On dit que f est continue en x_0, si et seulement si:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) \text{ existe.}$$

2.7.2. Remarque

Si cette limite existe elle ne peut être que $f(x_0)$; d'où :

$$f \text{ continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = f(x_0).$$

Il résulte des propriétés fondamentales sur les limites établies au § 2 les propositions suivantes :

2.7.3. Proposition

Soit S un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $x_0 \in S$ et $f, g : S \to \mathbb{R}$ continues en x_0, alors $f + g$, λf, fg, $\frac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$, sont continues en x_0.

2.7.4. Proposition

Soit $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$, et $g : T \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(S) \subseteq T$; si f est continue en x_0 et g est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

2.7.5. Proposition

Soit $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$. f est continue en x_0 si, et seulement si, pour toute suite (x_n) convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$.

2.7.6. Exemples

— *$f(x) = x$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$,*

— *$f(x) = \frac{1}{x}$ est continue pour tout $x \neq 0$,*

— $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$. — *Toute fraction rationnelle* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *est continue en tout point* x_0 *de* $\mathbb{R}$, *tel que* $Q(x_0) \neq 0$.

2.8. Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Lorsque le sous-ensemble S de $\mathbb{R}$ est un intervalle, on peut établir d'importantes propriétés des fonctions continues.

2.8.1. Théorème

Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$: si f est continue en tout point de I, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

En bref, l'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle. Ce résultat porte aussi le nom de *théorème des valeurs intermédiaires*.

Démonstration — D'après la proposition 2.1.10, $f(I)$ est un intervalle si et seulement si :

$$\forall y_1, y_2 \in f(I),\ y_1 < y_2 \Rightarrow [y_1, y_2] \subset f(I).$$

Soit γ tel que $y_1 < \gamma < y_2$. Comme $y_1, y_2 \in f(I)$, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

Supposons $x_1 < x_2$ (on fera un raisonnement analogue si $x_1 > x_2$).

Soit $\mathscr{C} = (x \in [x_1, x_2],\ f(x) \leq \gamma)$: $\mathscr{C} \neq \emptyset$ car $x_1 \in \mathscr{C}$. $\mathscr{C}$ est majoré par x_2, donc il admet une borne supérieure c et $c \in [x_1, x_2]$, donc f est continue en c.

c borne supérieure de $\mathscr{C}$ entraîne que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in \mathscr{C} \text{ tel que } x_n > c - \frac{1}{n}$$

la suite (x_n) converge vers c, car $|x_n - c| = c - x_n < \frac{1}{n}$.

De $f(x_n) \leq \gamma$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(c)$ (f continue en c) on conclut : $f(c) \leq \gamma$ et par suite $c \neq x_2$.

Comme c est la borne supérieure de $\mathscr{C}$, pour tout $x \in]c, x_2]$,

$f(x) > \gamma \Rightarrow \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c) \geq \gamma$ (f continue en c). D'où $f(c) = \gamma$.

2.8.2. Corollaire

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$; si $f(a)f(b) < 0$, il existe au moins un point $x \in]a, b[$, $f(c) = 0$.

Lorsque l'intervalle I est fermé et borné c'est-à-dire de la forme $I = [a, b]$, $a \leq b$ on a en outre le théorème suivant :

2.8.3. Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Si f est continue en tout point de $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Démonstration — Montrons d'abord que f est bornée sur $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a, b]$.

Si ce n'était pas le cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existerait $x_n \in [a, b]$ tel que $|f(x_n)| > n$.

De la suite bornée (x_n), on peut extraire une suite (x_{n_k}) convergente vers $L \in [a, b]$. Comme f est continue en L et $(x_{n_k}) \to L$, alors

$f(x_{n_k}) \to f(L)$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists k_0$, tel que

$$k \geq k_0, \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(L)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Mais de $|f(x_n)| > n$, pour tout n, on tire

$$|f(x_{n_k}) - f(L)| \geq ||f(x_{n_k})| - |f(L)|| \geq |n_k - C| \text{ où } C = |f(L)| \tag{2}$$

Donc pour $k \geq k_0$, $|n_k - C| < \varepsilon$, c'est-à-dire $n_k \leq C + \varepsilon$ pour $k \geq k_0$, ce qui est absurde puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} n_k = +\infty$. Donc f est bornée sur $[a, b]$.

Soit $\alpha = \sup\limits_{x \in [a, b]} f(x)$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $z_n \in [a, b]$, $f(z_n) > \alpha - \frac{1}{n}$ et $f(z_n) \leq \alpha$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |f(z_n) - \alpha| < \frac{1}{n} \tag{3}$$

la suite (z_n) étant bornée, il existe une suite extraite (z_{n_k}) qui converge vers $l \in [a, b]$.

Comme f est continue en l et $z_{n_k} \to l$, alors $f(z_{n_k}) \to f(l)$. D'après (3), la suite $f(z_n)$ converge vers α.

Comme $f(z_{n_k})$ est une suite extraite de la suite $f(z_n)$, $f(z_{n_k})$ converge aussi vers α.

De l'unicité de la limite, il résulte que $\alpha = f(l)$.

Pour démontrer que f atteint sa borne inférieure, on peut appliquer le raisonnement précédent à la fonction $(-f)$.

2.8.4. Remarque

Les propriétés énoncées dans les théorèmes 2.8.1 et 2.8.3 peuvent être vérifiées par une fonction sur un intervalle, sans que celle-ci soit continue sur cet intervalle, comme le montre l'exemple suivant :

$f : [0,2] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

f est bornée sur $[0,2]$, atteint sa borne supérieure 1 et sa borne inférieure 0, ainsi que tout nombre compris entre 0 et 1, sans être continue sur $[0,2]$ (f n'est pas continue en 1).

2.9. Continuité uniforme Convergence uniforme

2.9.1. Continuité uniforme

2.9.1.1. Définition

Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On appelle *oscillation de f* sur $[a,b]$ et on note $\omega(f,[a,b])$ la différence $M(f) - m(f)$, où $M(f)$ et $m(f)$ sont respectivement les valeurs du maximum et du minimum de f sur $[a,b]$.

$\omega(f,[a,b])$ mesure donc la longueur de l'intervalle $f([a,b])$.

2.9.1.2. Remarque

Si $[c,d] \subset [a,b]$, alors $\omega(f,[c,d]) \leq \omega(f,[a,b])$.

Ce qui est remarquable pour une fonction continue sur $[a,b]$, c'est qu'on peut trouver un découpage de $[a,b]$ en un nombre fini de sous intervalles $[c_i,d_i]$ tel que $\omega(f,[c_i,d_i])$ soit arbitrairement petite pour tout i. Ce résultat qu'on établira ci-dessous sera employé par la suite pour montrer qu'une application continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

2.9.1.3. Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un découpage de $[a,b]$ en nombre fini de sous-intervalles tel que l'oscillation de f sur chacun des sous-intervalles est plus petite que ε.

Preuve — Si la propriété du théorème 2.9.1.3 n'a pas lieu, il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dans le découpage de $[a,b]$ en sous-intervalles de longueur $\frac{1}{2n}$, il existe au moins un sous-intervalle $[x_n,y_n]$ tel que $\omega(f,[x_n,y_n]) > \varepsilon_0$.

Donc $\exists \varepsilon_0 > 0$, et deux suites (x_n) et (y_n) de $[a,b]$, tel que si $n \in \mathbb{N}^*$

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0. \tag{1}$$

La suite (x_n) étant dans $[a,b]$, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (2.3.4.4) il existe une suite extraite (x_{n_k}) de (x_n) qui converge vers $l \in [a,b]$.

D'après (1) la sous-suite (y_{n_k}) converge aussi vers l. Comme f est continue au point l, les suites $(f(x_{n_k}))$ et $(f(y_{n_k}))$ convergent vers $f(l)$ et donc pour k assez grand

$$|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| < \varepsilon_0.$$

Ce qui contredit la seconde inégalité de (1).

Le théorème 2.9.1.3 peut aussi s'énoncer de la façon suivante :

2.9.1.4. Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, ne dépendant que de ε, tel que pour tous x et x' de $[a,b]$ vérifiant $|x - x'| \leq \delta$, on ait :

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

D'où la définition suivante :

2.9.1.5. Définition

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$. On dira que f est uniformément continue sur I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ tel que } \forall x, x' \in I, |x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

2.9.1.6. Remarques

1) Les théorèmes 2.9.1.3 ou 2.9.1.4 expriment que toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ *est uniformément continue sur* $[a,b]$.

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$. Pour montrer que f n'est pas uniformément continue sur I, il suffit de montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$, et deux suites (x_n) et (y_n) de I tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0.$$

2) Exemples

a) $f(x) = 2x$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

En effet $|f(x) - f(y)| = 2|x - y|$. Pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *n'est pas uniformément continue sur* $]0, +\infty[$.

En effet, soit $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ et (x_n) et (y_n) les suites de $]0,+\infty[$ définies par :

$$x_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

on a :

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| = 1 > \frac{1}{2}$$

Donc d'après 2.9.1.6, 1) $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

On pourra montrer à titre d'exercices que pour tout nombre $a > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ est uniformément continue sur $[a, +\infty[$.

2.9.2. Suites de fonctions. Convergence uniforme

2.9.2.1. Définition

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dira que la suite (f_n) converge sur D, vers une fonction f, si pour chaque $x \in D$, la suite de nombre réels $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. La fonction f s'appelle la limite sur D de la suite (f_n) et on note

$$f = \lim_{n \to +\infty} (f_n) \quad \text{sur } D$$

ou

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f \quad \text{sur } D.$$

2.9.2.2. Exemples

1) La suite (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle $x \to f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit $D = [0, 1]$: la suite (f_n) définie sur D par $f_n(x) = x^n$, converge sur D vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

3) $D = \mathbb{R}$, la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$, converge sur D vers la fonction $f : x \to x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) $D = \mathbb{R}$ la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx + n)}{n}$ converge sur D vers la fonction nulle.

La définition 2.9.2.1 est équivalente à la définition suivante :

2.9.2.3. Définition

Une suite (f_n) de fonctions sur $D \subset \mathbb{R}$, converge vers une fonction f sur D, si et seulement si :

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $x \in D$, il existe un entier naturel $n_0(\varepsilon, x)$ dépendant de x et de ε tel que pour tout entier $n \geq n_0(\varepsilon, x)$ on a :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

on dit alors que (f_n) converge *simplement* sur D vers f.

2.9.2.4. Remarques

1) L'entier n_0 intervenant dans la définition 2.9.2.3 dépend en général de ε et de x.

Ainsi en appliquant la définition 2.9.2.3 à la convergence des suites de 2.9.2.2, on verra que n_0 dépend effectivement de x et de ε pour les exemples 1), 2) et 3) alors que dans l'exemple 4), l'entier n_0 peut être choisi de manière à ne dépendre que de ε.

2) Si $f_n \to f$ sur $D \subset \mathbb{R}$ et si pour tout n, f_n est continue sur D, la limite f n'est pas nécessairement continue sur D, comme le montre l'exemple 2.9.2.2.2).

Une condition suffisante pour que la limite f d'une suite (f_n) de fonctions continues sur $D \subset \mathbb{R}$, soit continue sur D est que, pour tout $\varepsilon > 0$, le graphe de f_k sur D, pour k assez grand, soit compris entre les graphes de $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$.

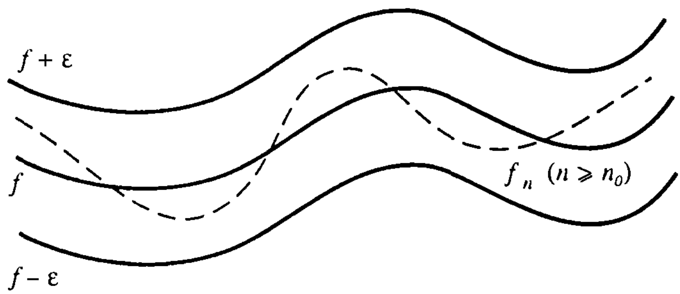


FIGURE: 2.2

Cette propriété est précisée par la définition suivante :

2.9.2.5. Définition

Une suite (f_n) de fonctions sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, converge uniformément sur D, vers une fonction f si et seulement si :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel $n_0(\varepsilon)$ (dépendant uniquement de ε), tel que tout entier $n \geq n_0$ et tout $x \in D$ on a :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2.9.2.6. Remarques

Si (f_n) converge uniformément sur D vers f, alors (f_n) converge simplement sur D vers f. La réciproque n'est pas vraie en général comme

on le voit sur les exemples 2.9.2.2,1), 2.9.2.2,2) et 2.9.2.2,3), en utilisant la proposition suivante :

2.9.2.7. Proposition

Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant simplement vers f sur D. (f_n) ne converge pas uniformément sur D vers f, si et seulement si : il existe $\varepsilon_0 > 0$, une suite extraite (f_{n_k}) de (f_n), et une suite (x_k) de D telles que :

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Preuve — D'après la définition 2.9.2.5, (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur D, si et seulement si : il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que pour tout entier n_0, il existe un entier $n \geq n_0$ et $x_{n_0} \in D$ tels que :

$$|f_n(x_{n_0}) - f(x_{n_0})| \geq \varepsilon_0.$$

Ainsi pour $n = 1$, il existe $n_1 \geq 1$ et $x_1 \in D$ tel que

$|f_{n_1}(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0$.

Pour $n = \sup(2, 2n_1)$, il existe $n_2 \geq n$ et $x_2 \in D$ tel que

$|f_{n_2}(x_2) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0$.

On construit ainsi une suite (f_{n_k}) extraite de (f_n) et une suite (x_k) de D telles que :

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0.$$

Réciproquement il est clair que si la condition $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est vérifiée, la convergence n'est pas uniforme.

2.9.2.8. Exemples

1) Pour l'exemple 2.9.2.2, 1) si on prend $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $n_k = k$ *et* $x_k = k$, *alors* $f_k(x_k) = 1$ *et* $|f_k(x_k) - f(x_k)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$.

Donc la suite (f_n) *de l'exemple 2) ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}$, *vers la fonction* f, $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2) Pour l'exemple 2.9.2.2,2), si on prend $\varepsilon_0 = \frac{1}{r3}$, $n_k = k$ *et* $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/k}$, *alors*

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = |f_k(x_k)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

donc la convergence n'est pas uniforme.

3) Pour l'exemple 2.9.2.2,3) si on prend $\varepsilon_0 = 1$, $n_k = k$, $k \geq 1$ *et* $x_k = k$ *alors*

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = k \geq 1.$$

par suite la convergence n'est pas uniforme.

4) Par contre pour l'exemple 2.9.2.2,4) on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, si on choisit n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, alors pour $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et dans ce cas la convergence est uniforme.

Le théorème qui suit exprime que la convergence uniforme d'une suite de fonctions continues suffit à assurer la continuité de la fonction limite.

Autrement dit, si (f_n) converge uniformément sur $D \subset \mathbb{R}$ vers f, et si les fonctions f_n sont continues sur D, alors f est continue sur D c'est-à-dire pour tout $x \in D$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to +\infty} f_n(x))$$

On verra un phénomène analogue quand on étudiera la convergence des suites de fonctions dérivables.

2.9.2.9. Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $D \subset \mathbb{R}$, qui converge uniformément sur D vers f, alors la fonction f est continue sur D.

Preuve — Supposons que (f_n) converge uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \;\; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \forall x \in D$.

Soit $x_0 \in D$. Comme f_{n_0} est continue en x_0, $\exists \alpha > 0 : |x - x| < \alpha \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Soit maintenant $x \in D$ tel que $|x - x_0| < \alpha$; on a alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

f est donc continue en x_0. x_0 étant un point arbitraire de D, il en résulte que f est continue sur D.

2.9.2.10. Remarque

La convergence uniforme d'une suite de fonctions continues est une condition suffisante, mais non nécessaire, pour assurer la continuité de la fonction limite. Ainsi dans les exemples 2.9.2.2.1 et 2.9.2.2.3 les suites de fonctions continues ne convergent pas uniformément, alors que leurs limites sont continues.

2.10. À RETENIR

Soit $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

— Si S est un intervalle, et f est continue en tout point de S, alors $f(S)$ est un intervalle.

— Si $S = [a, b]$, $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et f est continue en tout point de $[a, b]$ alors :

i) $f([a, b])$ est bornée,

ii) f atteint sa borne supérieure M et sa borne inférieure m,

iii) pour tout $y \in [m, M]$, l'équation en x

$$f(x) = y$$

admet au moins une solution dans $[a, b]$.

iv) f est uniformément continue sur $[a, b]$.

— La limite uniforme d'une suite de fonctions continues, est continue.

2.11. Exercices et problèmes

1) Les suites suivantes sont-elles convergentes :

a) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2} n, \ \forall n \geq 0$.

b) $x_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ où P est un polynôme de degré p et Q un polynôme de degré q, x_n est défini pour n assez grand.

c) $u_n = \operatorname{tg}\left((1+n)\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2) Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels telles que la suite $(U_n V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont elles convergentes ?

3) Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels. On suppose que U_n est bornée et que $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$. La suite $(U_n V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet-elle une limite quand n tend vers $+\infty$.

4) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positif. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = L > 0$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < L$.

Montrer qu'il existe $a > 0$, $b > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que :

$$n \geq k \Rightarrow A(L-\varepsilon)^n \leq x_n \leq B(L+\varepsilon)^n$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.

5) Soient a_1 et b_1 deux nombres réels tels que $0 < a_1 < b_1$. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

a) Montrer par récurrence que $\forall n,\ a_n < b_n$.

b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite.

6) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels définies par : $u_1 = -2$, $u_n = \dfrac{2u_{n-1}}{u_{n-1}+3}$ pour $n \geq 2$.

a) Montrer que $u_n \geq -2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que les u_n sont alternativement négatifs et positifs.

c) Établir que chacune des suites partielles (u_{2p}) et (u_{2p+1}) est monotone et montrer que ces suites partielles convergent.

d) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente?

7) a) Soient deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et tend vers $+\infty$.

Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$ existe, il en est de même pour l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ et de plus on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} \quad \text{(théorème de Stolz).}$$

b) Appliquer ce résultat à l'étude de la suite $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ si la suite a_n admet une limite.

8) $E(x)$ désignant la partie entière de x, soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (-1)^{E(x)}(x - E(x))^2. \end{aligned}$$

a) Montrer que f est périodique de période égale à 2.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

c) Montrer que f est discontinue en tout point $k \in \mathbb{Z}$.

d) Faire la représentation graphique de f.

9) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

h est-elle continue?

10) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f est continue au point $x_0 = \frac{1}{2}$ et est discontinue en tout autre point x distinct de $\frac{1}{2}$.

11) La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est-elle continue?

12) Une application $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\forall x, y \in I, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Montrer qu'une application lipschitzienne est uniformément continue.

13) Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Q}$. $E(u)$ désignant la partie entière de u, on considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to x - aE\left(\frac{1}{a}\right)$$

a) Déterminer les points de discontinuité de f.

b) Soit $\bar{f}$ la restriction de f à $\mathbb{Q}$. Faire une représentation graphique de $\bar{f}$. Montrer que $\bar{f}$ est injective.

c) On note $J = \bar{f}(\mathbb{Q})$. L'application $\overline{f^{-1}} : J \to \mathbb{Q}$ est-elle continue?

14) Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$, $0 \leq k < 1$, tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Soit $c \in [a, b]$. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = c, \ x_{n+1} = f(x_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$.

b) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite Cauchy.

c) En déduire qu'il existe un unique point $x \in [a, b]$ qui vérifie l'égalité $f(x) = x$.

15) Soit $P(x)$ un polynôme de degré n,

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0.$$

tel que $a_0 a_n < 0$.

Montrer qu'il existe au moins $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_0) = 0$.

16) Soit $f(x) = \operatorname{tg} x$, on a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ alors qu'il n'existe pas de $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ tel que $f(x) = 0$. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème des valeurs intermédiaires.

17) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

a) Montrer que f est bornée.

b) Si de plus $l < f(0)$, démontrer l'existence d'un point de $c \in [0, +\infty[$ où f atteint son maximum.

18) Soient $a > 0$ et $c > 1$, tels que $0 < a < c$. En considérant la fonction $f(x) = x^n$, $n > 0$, montrer qu'il existe $b \in]0, 1[$ tel que $f(b) = a$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $a \in \mathbb{R}_+^*$ il existe un unique réel $b > 0$, tel que $b^n = a$. Si n est impair et $a < 0$, montrer qu'il existe un unique réel $b < 0$ tel que $b^n = a$.

19) On dit qu'une racine réelle d'un polynôme $f(x)$ a été isolée, si on trouve un intervalle $[a, b]$ ne contenant que cette racine et pas d'autres.

En vous aidant du théorème des valeurs intermédiaires, isoler les racines réelles des polynômes suivants, chacun ayant exactement quatre racines.

(i) $3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8 = 0$

(ii) $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$.

20) i) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continue sur $[0, 1]$ telle que $0 \leq f(x) \leq 1$, pour tout $x \in [0, 1]$.

Montrer qu'il existe au moins un point c, tel que $f(c) = c$ (appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g(x) = f(x) - x$).

ii) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \leq a$ et $f(b) \geq b$. Montrer qu'il existe un point $x_0 \in [a, b]$, tel que $f(x_0) = x_0$.

21) Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $[-1, 1]$, qui vérifient la relation :

$$x^2 + f(x)^2 = 1, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

a) Trouver deux fonctions f_0 et f_1 appartenant à $\mathfrak{F}$ et qui sont continues sur $[-1, 1]$.

b) Trouver une fonction $g \in \mathfrak{F}$ qui soit non continue.

c) Montrer que toute fonction $f \in \mathfrak{F}$ est continue aux points $+1$ et -1.

d) Soit $h \in \mathfrak{F}$ une fonction continue sur $[-1, 1]$. Montrer que $h(0) > 0$ implique $h(x) > 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

e) En déduire que les seuls éléments de $\mathfrak{F}$ qui sont continus sur $[-1, 1]$, sont les deux fonctions trouvées à la question a).

22) Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dira que f est convexe sur $[a, b]$ si et seulement si

$$\forall x,\ x' \in [a, b], \forall t \in [0, 1] \text{ on a :}$$

$f(tx + (1-t)x') \leq tf(x) + (1-t)f(x')$. Pour $x_0 \in]a, b[$, on considère la fonction : $\varphi_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

i) Montrer que φ_{x_0} est croissante sur $I - \{x_0\}$.

ii) En déduire que $\lim\limits_{x \to x_0^+} \varphi_{x_0}(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} \varphi_{x_0}(x)$ existent, et

$$\lim_{x \to x_0^-} \varphi_{x_0}(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} \varphi_{x_0}(x)$$

iii) En déduire que f est continue en tout point de $]a, b[$.

23) On considère les suites (f_n) définies sur $D = (x \in \mathbb{R} : x > 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par les formules suivantes :

$$\text{a) } \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{b) } \frac{x^n}{n+x^n} \quad \text{c) } \frac{x^n}{1+x^2 n} \quad \text{d) } \frac{x}{n} e^{-\frac{x}{n}}.$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de ces suites.

24) Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions continues sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq \cdots \text{ pour tout } x \in D.$$

i) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(c) = 0$, pour $c \in D$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et un voisinage U de c, tels que si $n \geq m$ et $x \in U \cap D$, alors $f_n(x) < \varepsilon$.

ii) En déduire la propriété suivante due à Ulisse Dini. Si une suite monotone de fonctions continues converge en chaque point d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ vers une fonction f continue, alors la convergence est uniforme sur $[a, b]$.

25) Démontrer le résultat suivant dû à Georges Pôlya. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle $I[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction décroissante sur I.

— la suite (f_n) converge ponctuellement sur I vers une fonction $f(x)$ continue sur I.

Montrer que la convergence est alors uniforme sur I (on ne suppose pas que les f_n sont continues).

Problème

26) Approximation uniforme d'une fonction continue par une suite de polynômes

Soient m, n deux entiers tels que $0 \leq m \leq n$. On pose :

$$I_{n,m}(x) = \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}, \qquad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n+m)!}$$

1) Montrer que les polynômes $I_{n,m}(x)$ vérifient les propriétés suivantes :

(1) $\sum_{m=0}^{n} I_{n,m}(x) = 1.$

(2) $\sum_{m=0}^{n} mI_{n,m}(x) = nx.$

(3) $\sum_{m=0}^{n} (nx-m)^2 I_{n,m}(x) = nx(1-x).$

Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, le polynôme de Bernstein de degré $\leq n$ associé à f est :

$$B_n(x) = B_n(f,x) = \sum_{m=0}^{n} I_{n,m}(x) f(\frac{m}{n})$$

L'objet de ce problème est de démontrer que si f est continue sur $[0,1]$ la suite des polynômes $B_n(x)$ converge uniformément sur I vers f. On suppose donc que f est continue sur $[0,1]$.

2) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tel que :

$|x_1 - x_2| < \delta$, implique $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tous x_1, x_2 de $[0,1]$.

3) Pour n fixé, on considère :

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} [f(x) - f(\frac{m}{n})] I_{n,m}(x) \qquad (1)$$

on décompose la somme Σ du deuxième membre de (4) en deux sommes Σ_1 et Σ_2 définies ainsi

pour Σ_1, m prend tous les entiers m, $m \leq n$ tels que $\left|x - \frac{m}{n}\right| < \delta$,

pour Σ_2, m prend tous les entiers m, $m \leq n$ tels que $\left|x - \frac{m}{n}\right| \geq \delta$.

3.1) En utilisant 2) montrer que $|\Sigma_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

3.2) On pose $M = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Montrer que :

$$|\Sigma_2| \leq 2M\Sigma_2 I_{n,m}(x) = 2M\Sigma_2 \frac{(nx-m)^2 I_{n,m}x}{(nx-m)^2}$$
$$\leq 2M\Sigma_2 \frac{(nx-m)^2}{n^2\delta^2} I_{n,m}x.$$

En déduire, en utilisant la relation (3) de 1) que :

$$|\Sigma_2| \leq \frac{M}{2n\delta^2}$$

3.3) En utilisant 3.1 et 3.2 montrer que $|f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon$ si $n \geq \frac{M}{2n\delta^2}$ pour tout $x \in [0,1]$.

3.4) En déduire le *théorème d'approximation de Weierstrass* : toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, est limite uniforme d'une suite de polynômes.

27) Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur une intervalle I. On dira que (f_n) est uniformément de Cauchy sur I, si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que}, \ \forall n, m \geq n_0, \ \forall x \in I, \ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Montrer que f_n converge uniformément si et seulement si elle est uniformément de Cauchy.

28) 1) Soit $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie la relation

$$h(xy) = h(x) + h(y), \qquad \forall x, y. \qquad (*)$$

Montrer que h est identiquement nulle.

2) Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle qui vérifie la relation (*) de 1).

a) Montrer que h est continue sur $]0, +\infty[$ si et seulement si elle est continue au point $x = 1$.

b) Montrer que $h(1) = 0$ et que si $x > 0$, et $r \in \mathbb{Q}$, alors $h(x^r) = rh(x)$.

Indication — On montrera le résultat d'abord si $r \in \mathbb{Z}$, puis l'on établira le résultat si

$$r = \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ en remarquant que } x = (x^{\frac{1}{q}})^q.$$

c) Montrer que s'il existe un intervalle ouvert non vide I tel que $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors h est strictement croissante et continue.

d) Montrer que si h est continue alors on a : $h(x) > 0$ si $x > 1$, et $h(x) < 0$ si $x < 1$.

c) Soit $b > 1$. Montre qu'il existe au plus une fonction continue h sur $]0, +\infty[$ vérifiant (*) et telle que $h(b) = 1$.

29) Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, c un point de $[a, b]$. Soient

$$f_1 : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad f_2 : [c, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \alpha_1 x + \beta_1 \qquad\qquad x \longmapsto \alpha_2 x + \beta_2$$

deux applications affines telles que $f_1(c) = f_2(c)$.

Soit l'application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \leq c \\ f_2(x) & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$

a) Soit $u \in [a, c]$, $v \in [c, b]$. Montrer que

$$|f(u) - f(v)| \leq \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|)\, |u - v|$$

et en déduire que f est lipschitzienne (voir exercice 12).

b) On dit qu'une application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est affine par morceaux s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ telle que la restriction f_i de f à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ soit une application affine. Montrer que si f est une application affine par morceaux, alors elle est lipschitzienne.

c) Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue.

En utilisant le fait que f est uniformément continue, prouver que : $\forall n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction affine par morceaux φ_n telle que :

$$|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{n}, \ \forall x \in [a, b].$$

Problème

30) Fonction à variation bornée

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. Pour toute subdivision $P = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ de $[a, b]$, on pose $V_f(P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$. On dira que la fonction est à variation bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute subdivision P de $[a, b]$, on ait : $V_f(P) \leq M$.

On note $V_b([a, b])$ l'ensemble des fonctions à variation bornée sur $[a, b]$. On pose $V_f = \sup\{V_f(P), P \sup \text{ de } [a, b]\}$.

1) Montrer que $V_f = 0 \Leftrightarrow f = \text{constante}$.

2) Soit $P = (a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ et $Q = (y_0 = a < \cdots < y_m = b)$ tel que $\{x_0, x_1, \cdots x_n\} \subset \{x_0 \cdots, y_n\}$. Montrer que $V_P f \leq V_Q f$.

3) Si $f \in V_b([a,b])$, montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivision de $[a,b]$ telle que $V(f) = \lim_n V_{P_n}(f)$.

4) Montrer que si f est croissante, alors $f \in V_b([a,b])$ et $V(f) = f(b) - f(a)$. En est-il ainsi si f est décroissante?

5) Montrer que si f est lipschitzienne de rapport m, alors

$$f \in V_b([a,b]) \text{ et } V_f \leq fm(b-a).$$

6) Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

n'est pas à variation bornée sur $[0,1]$. Montrer que la fonction $g : x \to xf(x)$ est continue mais n'est pas à variation bornée.

7) Montrer que si $f \in V_b([a,b])$ alors $|f(x)| \leq f(a) + V(f)\ \forall x \in [a,b]$.

8) Montrer que si $f \in V_b([a,b])$ et $g \in V_b([a,b])$, alors $fg \in V_b([a,b])$. En est-il de même pour le quotient $\frac{f}{g}$.

9) a) Soit $f \in V_b([a,b])$. On considère sur $[a,b]$ la fonction $\tilde{f}$ définie par $\bar{f}_1(x) = V_f[a,x]$, $\tilde{f}(a) = 0$. Montrer $\bar{f}_1$ est croissante.

b) soit $f_2 : x \to f_2(x) = f_1(x) - f(x)$, montrer que f est croissante.

c) Déduire de a) et b) le résultat suivant :

Théorème — Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application : f est à variation bornée si et seulement si f est la différence de deux fonctions croissantes.

Chapitre 3 : DIFFÉRENTIATION

Introduction

Le concept central du calcul différentiel est la notion de dérivée, qui trouve son origine dans un problème de géométrie : déterminer la tangente en un point d'une courbe.

Le problème s'est imposé à Fermat, mathématicien français, qui cherchait à déterminer les maximums et les minimums de certaines fonctions. Il s'est alors aperçu qu'en ces points, les fonctions ont des tangentes horizontales. D'où la recherche de telles tangentes, et d'une manière générale la recherche d'une tangente en un point quelconque d'une courbe. Ce problème fut résolu au XVII$^{\text{e}}$ siècle par Newton et Leibniz en introduisant la notion de « pente » en un point d'une courbe, qui, dans le cas où la courbe est donnée par une équation $y = f(x)$, définit la dérivée de f en ce point. La notion de dérivée permet d'améliorer le problème d'approximation abordé dans le chapitre 2, en approchant une fonction f par une fonction affine au voisinage de x_0, $x \to ax + b$ telle que $ax_0 + b = f(x_0)$; c'est-à-dire une fonction affine de la forme $x \to a(x - x_0) + f(x_0)$; le meilleur choix s'obtient en prenant, a égal à la dérivée de f en x_0. On abordera la définition de la dérivée, à partir de la notion de tangente : ce qui est plus parlant et plus conforme au point de vue historique.

Le concept de dérivée est peut être le plus fabuleux des mathématiques ; ses applications se trouvent tout autour de nous dans notre vie quotidienne : vitesse d'un avion ou d'une voiture; partout où il y a mouvement sans choc. Il permet de transformer certains problèmes en ce qu'il y a de plus simple : les fonctions linéaires, les problèmes linéaires, ceux que l'on sait résoudre.

3.1. Tangente en un point d'une courbe plane

Soit $\mathscr{P}$ le plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $m_0 = (x_0, y_0) \in \mathscr{P}$.

On dira qu'un point $m = (x, y)$ de $\mathscr{P}$ approche m_0 à ε près si la longueur du vecteur $\overrightarrow{m_0m}$, notée $||\overrightarrow{m_0m}||$ est inférieure à ε, soit :

$$||\overrightarrow{m_0m}|| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon.$$

Si S est un sous-ensemble de $\mathscr{P}$. On dira que S est *arbitrairement voisin* de m_0 et on notera $S \sim m_0$, si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in S, \quad \text{tel que,} \quad ||\overrightarrow{m_0 m}|| < \varepsilon.$$

3.1.1. Définition

Soit $f : S \subset \mathscr{P} \to \mathbb{R}$, $m_0 \in \mathscr{P}$ et $S \sim m_0$. Le symbole $\lim\limits_{\substack{m \to m_0 \\ m \in S}} f(m) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ signifie :

$$\forall \varepsilon >,\ \exists \alpha > 0, \quad \text{tel que,} \quad ||\overrightarrow{m_0 m}|| < \alpha \Rightarrow |f(m) - \lambda| < \varepsilon.$$

On dira que $f(m)$ tend vers λ quand m tend vers m_0 en restant dans S.

3.1.2. Remarque

De la double inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2} \le \sup(|a|, |b|) \le \sqrt{a^2 + b^2}$$

valable pour tous a, b de $\mathbb{R}$, on conclut : si $||\overrightarrow{m_0 m}|| < \alpha$ alors $|x - x_0| < \alpha$ et $|y - y_0| < \alpha$ où $m = (x, y)$ et $m_0 = (x_0, y_0)$.

De même si $|x - x_0| < \alpha$ et $|y - y_0| < \alpha$ alors $||\overrightarrow{m_0 m}|| < \sqrt{2}\alpha$. Par suite :

$$\lim_{m \to m_0} f(m) = \lambda \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que,}$$
$$(|x - x_0| < \alpha \ \text{et}\ |y - y_0| < \alpha) \Rightarrow |f(m) - \lambda| < \varepsilon.$$

Soit Γ une courbe de $\mathscr{P}$ et $m_0 \in \Gamma$, tel que $\Gamma - \{m_0\} \sim m_0$. Pour tout $m \in \Gamma - \{m_0\}$ on note $P_{m_0}(m)$ la pente de la droite passant par m et m_0 : on définit ainsi une *application :*

$$P_{m_0} : \Gamma - \{m_0\} \to \mathbb{R}$$
$$m \mapsto P_{m_0}(m)$$

Si $P_{m_0}(m)$ admet une limite quand m tend vers m_0 en restant dans $\Gamma - \{m_0\}$, cette limite notée $P_{m_0}(\Gamma)$, s'appelle **pente de** Γ **en** m_0 *et la droite passant par m_0 et de pente $P_{m_0}(\Gamma)$, s'appelle* **tangente de** Γ **en** m_0.

3.1.3. Remarque

1) Cette définition n'implique nullement que la tangente « touche » Γ seulement en un point.

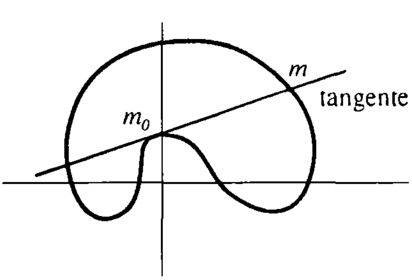


FIGURE: 3.1.3.A

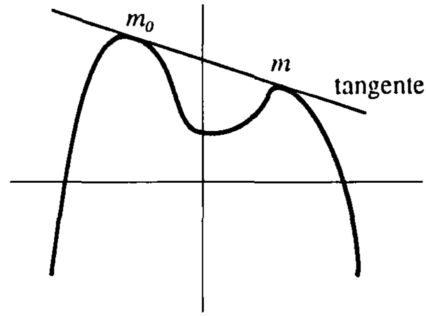


FIGURE: 3.1.3.B

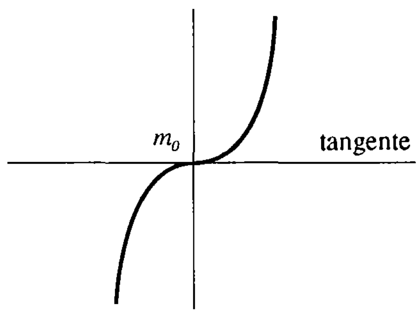


FIGURE: 3.1.3.C

2) Exemple

Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathscr{P},\ y = x^2,\ x \in \mathbb{R}\}$. *Calculons* $P_{m_0}(\Gamma)$ *où* $m_0 = (1, 1)$. *Soit* $m = (1+h, (1+h)^2)$ *un point de* $\Gamma - \{m_0\}$. $P_{m_0}(m) = \dfrac{(1+h)^2 - 1}{h} = h + 2$, $\overrightarrow{m_0 m} = (h, h(h+2))$. *Montrons que* $P_{m_0}(\Gamma) = 2$.

Pour cela d'après 3.1.2. on doit montrer que :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ *tel que* $(|h| < \alpha$ *et* $|h|\ |h+2| < \alpha) \Rightarrow |h+2-2| = |h| < \varepsilon$;

il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon$.

La courbe Γ *admet comme tangente en* m_0 *la droite* Δ *d'équation* $y = 2x - 1$. *On remarquera que l'équation de* Δ *est reliée à la fonction* $f(x) = x^2$ *par la relation :*

$$f(x) - (2x - 1) = \varepsilon(x)(x - 1) \quad \text{où} \lim_{x \to 1} \varepsilon(x) = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\varepsilon(x) = \frac{f(x) - 1}{x - 1} - 2\right)$$

Autrement dit pour x assez voisin de 1, $2x - 1$ est une valeur approchée de $f(x)$. En fait la relation (1) caractérise l'existence d'une tangente en un point d'une courbe définie par une équation $y = f(x)$.

3.1.4. Théorème

Soit Γ la courbe représentative dans $\mathscr{P}$ de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $m_0 = (x_0, f(x_0))$ un point de Γ.

Γ admet une tangente en m_0 si et seulement si, parmi les droites passant par m_0, il en existe une notée Δ, d'équation $y = T(x)$, telle que : $f(x) - T(x) = \varepsilon_{x_0}(x)(x - x_0)$ où ε_{x_0} est une fonction définie dans un voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0) avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_{x_0}(x) = 0$. Δ est unique et constitue la tangente de Γ en m_0. La pente de Δ, notée $f'(x_0)$, s'appelle la dérivée de f en x_0.

Démonstration

Γ admet une tangente en $m_0 \iff \lim\limits_{m \to m_0} P_{m_0}(m) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$;

où $P_{m_0}(m) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ avec $m = (x, f(x)) \neq m_0$. Par suite:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \text{tel que } (|x - x_0| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(x_0)| < \alpha) \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right| < \varepsilon \iff |f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)| < \varepsilon |x - x_0|$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < (\lambda + \varepsilon)|x - x_0| \qquad (2)$$

(2) entraîne que f est continue en x_0. Par suite pour $\alpha > 0$, $\exists \gamma > 0$, tel que :

$$|x - x_0| < \gamma \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha.$$

Donc si $|x - x_0| < \delta$ avec $\delta = \inf(\alpha, \gamma)$, on a $|x - x_0| < \alpha$ et $|f(x) - f(x_0)| < \alpha$ d'où

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

Par suite :

$$\lim_{m \to m_0} P_{m_0}(m) = \lambda \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$$

ce qui entraîne en particulier que λ est unique. En posant

$$\varepsilon_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda$$

on a :

$$f(x) - \lambda(x - x_0) - f(x_0) = \varepsilon_{x_0}(x)(x - x_0), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon_{x_0}(x) = 0;$$

et la droite Δ d'équation $y = \lambda(x - x_0) + f(x_0)$ est la tangente unique. de Γ en m_0.

Réciproquement. soit une droite D passant par m_0. d'équation $y = \rho(x - x_0) + f(x_0)$ telle que

$$f(x) - f(x_0) - \rho(x - x_0) = \varepsilon_{x_0}(x)(x - x_0), \text{ où } \lim_{x \to x_0} \varepsilon_{x_0}(x) = 0 \tag{3}$$

D'après (3) f est continue en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \rho. \tag{4}$$

Par un raisonnement analogue à celui fait précédemment on montre que la pente. $P_{m_0}(\Gamma)$. existe en m_0 et

$$\lim_{m \to m_0} P_{m_0}(m) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \rho.$$

Donc Γ admet la droite D comme tangente en m_0. et cette tangente est unique par suite de l'unicité de ρ. d'après (4).

3.2. Dérivée en un point. Différentielle

D'après le théorème 3.1.4. on peut poser naturellement la définition suivante.

3.2.1. Définition

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Γ la courbe représentative de f dans $\mathscr{P}$

On dira que f est dérivable en x_0 si Γ admet une tangente Δ au point m_0 d'abscisse x_0.

Δ étant unique. la pente de Δ s'appelle la dérivée de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

3.2.2. Remarques

1) D'après le théorème 3.1.4. f est dérivable en x_0. de dérivée $f'(x_0)$. si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

i) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

ii) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_{x_0}(x)(x - x_0)$, avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_{x_0}(x) = 0$

2) si f est continue en x_0 et si $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$), on convient de dire que la fonction f admet une dérivée infinie en x_0. Le graphe de f admet alors au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à l'axe Oy.

3.2.3. Différentielle d'une fonction en un point

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en $x_0 \in I$, on peut écrire dans un voisinage de x_0, en posant $x = x_0 + h$.

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \varepsilon(h)h \tag{1}$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

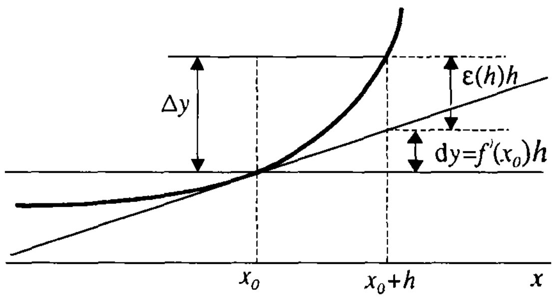


FIGURE: 3.2.3.

La relation (1) signifie que $\Delta y = f(x_0+h)-f(x_0)$. l'accroissement de f de x_0 à x_0+h, est la somme de deux termes : un premier terme $f'(x_0)h$ linéaire par rapport à l'accroissement de la variable x. et un second terme $\varepsilon(h)h$. un infiniment petit d'ordre au moins un par rapport à h.

Géométriquement, le premier terme représente l'accroissement de f mesuré le long de la tangente en m_0, alors que le deuxième terme mesure la différence entre la véritable valeur de f en $x_0 + h$. et cette valeur mesurée le long de la tangente (Fig. 3.2.3).

$f'(x_0)h$ s'appelle la partie linéaire principale de l'accroissement Δy. L'existence de la dérivée de f en x_0 implique la possibilité d'isoler dans Δy cette partie linéaire principale. La partie linéaire principale définit une application linéaire $h \mapsto f'(x_0)h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appelée la différentielle de f en x_0 et notée $\mathrm{d}f(x_0)$.

$$h \mapsto \mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)h.$$

La différentielle de l'application identique $x \mapsto x$ de $\mathbb{R}$, en un point quelconque x_0 de $\mathbb{R}$ est l'application linéaire $h \to h$ qui ne dépend pas

du point x_0 considéré. En notant (par abus de notation) $\mathrm{d}\,x$ cette application, on pourra alors écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,f(x_0)(h) &= f'(x_0)\,[\mathrm{d}\,x(h)]\\ &= (f'(x_0)\,\mathrm{d}\,x)\,(h). \quad \forall h \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{d}\,f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}\,x}$$

Ainsi $\forall h \in \mathbb{R}^*$, $f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}\,f(x_0)(h)}{\mathrm{d}\,x(h)} = \dfrac{\mathrm{d}\,f(x_0)}{\mathrm{d}\,x}(h)$. d'où la notation : $f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}\,f(x_0)}{\mathrm{d}\,x}$.

Ainsi si f est dérivable en x_0 on pourra écrire :

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathrm{d}\,f(x_0)(h) + \varepsilon_{x_0}(h)h}$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_{x_0}(h) = 0$. D'où la définition suivante :

3.2.3.1. Définition

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. On dira que f est différentiable en x_0 si, et seulement si : il existe une application linéaire $L^f_{x_0}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + L^f_{x_0}(h) + \varepsilon_{x_0}(h)h, \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon_{x_0}(h) = 0}$$

3.2.3.2. Remarques

1) Si $L^f_{x_0}$ existe, elle est unique et s'appelle la différentielle de f en x_0.

2) $L^f_{x_0}(h) = L^f_{x_0}(1) \cdot h$. D'où : f différentiable en $x_0 \iff f$ dérivable en x_0 et $L^f_{x_0}(1) = f'(x_0)$.

3) La définition 3.2.3.1 se généralise facilement à une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (voir Chap. 5).

3.3. Propriétés des fonctions dérivables

3.3.1. Si f est dérivable en x_0, elle est continue en ce point(3.2.2.1).

La réciproque de cette proposition est inexacte. La fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

est continue en 0, mais non dérivable en ce point.

3.3.2. Si f est dérivable en x_0 on a :

$$f(x) - f'(x_0)h - f(x_0) = \varepsilon_{x_0}(h)h$$

avec $h = x - x_0$, et $\lim_{h\to 0} \varepsilon_{x_0}(h) = 0$ C'est-à-dire : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, tel que, $|h| < \delta \Rightarrow |\varepsilon_{x_0}(h)| < \varepsilon$. D'où :

$$-\varepsilon h < f(x) - f'(x_0)h - f(x_0) < \varepsilon h, \quad \text{pour } |h| < \delta. \tag{1}$$

La relation (1) a une signification géométrique : si f est dérivable en x_0, au voisinage de x_0, le graphe de $y = f(x)$ est compris entre deux droites, faisant des angles arbitrairement petits avec la tangente au graphe en x_0 (Fig 3.3.2). Il résulte facilement de la relation (1) qui si $f'(x_0) < 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 < h < \delta$, on a :

$$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h) \tag{2}$$

Alors que si $f'(x_0) > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 < h < \delta$, on a :

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h) \tag{3}$$

3.3.3. Définition

Une fonction $f(x)$ est dite avoir un *maximum local* (resp. un *minimum local*) en un point $x_0 \in I$, s'il existe $\alpha > 0$, tel que $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$), pour $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I$.

Si f a un maximum local ou un minimum local en x_0, on dira que f a un *extremum local* en x_0. On a la proposition suivante :

3.3.3.1. Proposition

Si $f(x)$ a un extremum local en x_0, et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve — Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f ne peut pas avoir d'extremum local en x_0, d'après les inégalités (2) et (3) de 3.3.2. Toutefois si une fonction f admet une dérivée nulle en x_0, elle n'admet pas nécessairement un extremum local en ce point, comme le montre l'exemple :

$$f(x) = x^3 \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

Pour une fonction f dérivable, les points où elle atteint un extremum, sont à chercher parmi les solutions de l'équation :

$$f'(x) = 0$$

appelées les *points critiques* de f.

Les points critiques jouent un rôle prépondérant dans l'étude des fonctions différentiables.

3.3.4. Dérivée à gauche et dérivée à droite

On dira qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, x_0]$ (resp. $[x_0, b[$) est *dérivable à gauche* (resp. *à droite*) en x_0, si et seulement si

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ existe} \quad \left(\text{resp. } \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ existe}\right).$$

Cette limite, notée $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$), s'appelle la *dérivée à gauche* (resp. la *dérivée à droite*) de f en x_0. Dans ce cas les demi-droites d'équations $y = f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$, et $y = f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$, s'appellent respectivement la *demi-tangente à gauche* et la *demi-tangente à droite* au point $m_0 = (x_0, f(x_0))$. D'après la définition de la limite

$$\begin{array}{lcl} f \text{ est dérivable en } x_0 & \Longleftrightarrow & f'_g(x_0) \text{ et } f'_d(x_0) \text{ existent} \\ \text{de dérivée } f'(x_0) & & \text{et sont égales} \end{array}$$

Par contre $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ peuvent exister sans que $f'(x_0)$ existe.

Exemples.

Pour $f(x) = |x|$, $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.

Pour $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ x-1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$ $f'_g(1) = 1$, mais $f'_d(1)$ n'existe pas.

3.3.4.1. Dérivées d'ordre supérieur

Si $f'(x)$ existe dans un voisinage ouvert $V_\alpha(x_0)$ de x_0, on aura une fonction notée f' de $V_\alpha(x_0)$ définie dans $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{aligned} f' : V_\alpha(x_0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

Si f' est dérivable en x_0, sa dérivée notée $f''(x_0)$ est appelée la dé rivée seconde de f en x_0. En itérant ce processus, on définira la dérivée d'ordre p de f en x_0 notée $f^{(p)}(x_0)$.

L'existence de $f^{(p)}(x_0)$, suppose celle de $f^{(k)}(x_0)$ dans un voisinage de x_0 pour $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$).

— On dit que f est de classe C sur I si f est continue sur I.

— On dit que f est de classe C^p sur I ($p \geq 1$) si $f^{(p)}$ est définie et continue sur I.

— On dit que f est de classe C^∞ sur I si pour tout $p \in \mathbb{N}$, f est de classe C^p sur I.

3.3.5. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

3.3.5.1.

Il résulte immédiatement de la remarque 3.2.2.1 que si f et g sont dérivables en x_0, et si λ est un réel, alors λf et $f+g$ sont dérivables en x_0 : les dérivées sont respectivement $\lambda f'(x_0)$ et $f'(x_0)+g'(x_0)$.

3.3.5.2.

Si f et g sont dérivables en x_0 alors fg est dérivables en x_0 et l'on a :

$$\boxed{(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)} \tag{1}$$

(1) $\iff$ fg est différentiable en x_0 et l'on a :

$$\boxed{\mathrm{d}(fg)(x_0) = f(x_0)\,\mathrm{d}g(x_0) + g(x_0)\,\mathrm{d}f(x_0)}$$

Preuve — Les hypothèses entraînent

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \varepsilon_1(h)h, \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + hg'(x_0) + \varepsilon_2(h)h, \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0$$

d'où :

$$(fg)(x_0+h) = (fg)(x_0) + (f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0))\,h + \varepsilon(h)h$$

où

$$\varepsilon(h) = f(x_0)\varepsilon_2(h) + g(x_0)\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)\varepsilon_1(h) + f'(x_0)g'(x_0)h + hf'(x_0)\varepsilon_2(h) + hg'(x_0)\varepsilon_1(h).$$

Par suite $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. De 3.3.5.1 et 3.3.5.2 on conclut que l'ensemble des fonctions dérivables en x_0 est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues en x_0.

3.3.5.3.

Si f est dérivable en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, f étant continue en x_0, il existe un voisinage $V_\alpha(x_0) =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, tel que pour tout $x \in V_\alpha(x)$, $f(x) \neq 0$: alors $\frac{1}{f}$ est définie sur $V_\alpha(x_0)$, dérivable en x_0, et sa dérivée est :

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}} \tag{1}$$

(1) $\iff \dfrac{1}{f}$ est différentiable en x_0 et l'on a :

$$\boxed{\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)(x_0) = -\frac{1}{f(x_0)^2}\,\mathrm{d}f(x_0)} \tag{1'}$$

Preuve

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-1}{f(x)f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0.$$

il résulte des théorèmes sur les limites que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}.$$

3.3.6. Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $y_0 = f(x_0)$. g étant définie dans un voisinage V_{y_0} de y_0, et f étant continue en x_0, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0, tel que $f(V_{x_0}) \subset V_{y_0}$.

La fonction $g \circ f$ est définie sur le voisinage V_{x_0}, dérivable en x_0 et sa dérivée est :

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0).} \tag{1}$$

(1) $\iff$ $g \circ f$ est différentiable en x_0 et l'on a :

$$\boxed{\mathrm{d}(g \circ f)(x_0) = \mathrm{d}g\,(f(x_0)) \circ \mathrm{d}f(x_0).} \tag{1'}$$

ou s'il n'y a pas d'ambiguïté sur x_0, $\mathrm{d}(g \circ f) = \mathrm{d}g \circ \mathrm{d}f$.

Preuve — D'après la définition de la dérivée :

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \varepsilon_1(x)(x - x_0)] \tag{2}$$

$$g(y) - g(y_0) = [g'(y_0) + \varepsilon_2(y)(y - y_0)] \tag{3}$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{y \to y_0} \varepsilon_2(y) = 0$.

Posons $y = f(x)$ pour $x \in V_{x_0}$ dans ce cas : de (2) et (3) on tire :

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) &= [g'(f(x_0)) + \varepsilon_2(f(x))]\,[f'(x_0) + \varepsilon_1(x)]\,(x - x_0) \\ &= [g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)]\,(x - x_0) + \varepsilon_3(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_3(x) = g'[f(x_0)\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(f(x)]\,[f'(x_0) + \varepsilon_1(x)]$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_3(x) = 0$, car $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_2(f(x)) = 0$.

3.3.7. Remarque

Si $z = g(y)$ est une fonction différentiable, notons $*y = f(x)$ le changement de variable où f est une fonction différentiable. La formule (1') peut s'écrire sous la forme.

$$\boxed{\mathrm{d}*g = *\mathrm{d}\,g} \tag{2}$$

En effet

$$\begin{aligned} \mathrm{d}*g &= \mathrm{d}\,[g\,(f(x))] = g\,(f(x))'\,\mathrm{d}\,x. \\ *\mathrm{d}\,g &= *(g'(y)\,\mathrm{d}\,y) = *g'(y)*\mathrm{d}\,y \\ &\phantom{= *(g'(y)\,\mathrm{d}\,y)} = *g'(y)\,\mathrm{d}*y \end{aligned}$$

($\mathrm{d}\,y$ étant la différentielle de l'application identique $y \to y$). Donc

$$*\mathrm{d}\,g = g'\,(f(x))\,\mathrm{d}\,f = [g'\,(f(x)) \cdot f'(x)]\,\mathrm{d}\,x$$

d'où

$$g\,(f(x))' = g'\,(f(x)) \cdot f'(x)$$

(2) exprime que le changement de variable et l'opération d de différen-tiation commutent.

La formule (2) qui peut être généralisée à des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est capitale en analyse.

3.4. Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis

Dans ce paragraphe, on établit un ensemble de résultats reliant les valeurs d'une fonction f aux extrémités d'un intervalle I à la valeur de la dérivée de f en un point convenable de l'intérieur de I.

3.4.1. Théorème de Rolle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ ($\overset{\circ}{I}$ désigne l'intérieur de I), alors $\forall a,\ b \in I$ tels que $a < b$, $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve — I étant un intervalle, si $a,\ b \in I$, alors $[a,b] \subset I$ et $]a,b[\subset \overset{\circ}{I}$: par suite f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

— Si f s'annule sur $[a,b]$ alors

$$f'(t) = 0 \quad \forall t \in]a,b[.$$

— Si f n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f prend certaines valeurs strictement positives sur

$[a, b]$. D'après le théorème 2.8.3. f atteint en un point c de $[a, b]$ sa borne supérieure, avec nécessairement $f(c) > 0$.

Par suite $c \in]a, b[$ et d'après 3.3.3.1 $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique — Si les hypothèses du théorème 3.4.1 sont vérifiées, alors soit a, $b \in I$, tels que $f(a) = f(b) = 0$, le graphe de la restriction de f à $]a, b[$ admet au moins une tangente horizontale (Fig. 3.4.1).

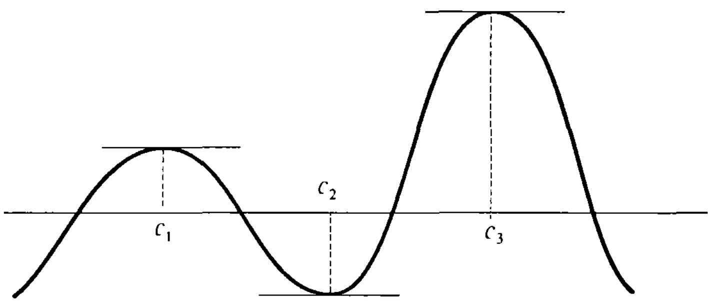


FIGURE: 3.4.1

Comme conséquence du théorème de Rolle on obtient le théorème fondamental suivant.

3.4.2. Théorème des accroissements finis

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors :

$$\boxed{\forall a, b \in I, \ \exists c \in]a, b[, \quad \text{tel que :} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)}$$

Preuve — On construit une fonction φ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, telle que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Soit $y = T(x)$ l'équation de la droite Δ passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ de la forme $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. Considérons

$$\varphi(x) = f(x) - T(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

D'après les hypothèses, φ est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, et puisque $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. **Interprétation géométrique** — Si les hypothèses du théorème 3.4.2. sont vérifiées, alors pour tous points

a, b de I, le graphe de la restriction de f à $]a, b[$ admet au moins une tangente parallèle à la droite joignant les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ (Fig.3.4.2).

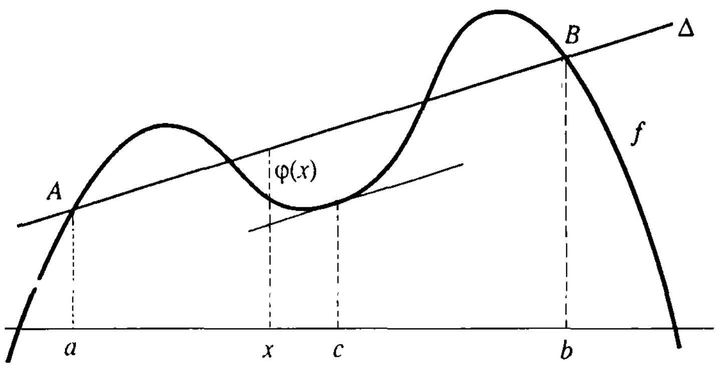


FIGURE: 3.4.2

Le théorème 3.4.2 peut être généralisé à deux fonctions de la façon suivante:

3.4.3. Théorème de Cauchy

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f et g sont continues sur I et dérivables sur $\overset{\circ}{I}$ alors

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall a, b \in I, \ \exists c \in]a, b[, \quad \text{tel que}: \\ f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]\end{array}} \tag{1}$$

Preuve

— si $g(b) = g(a)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$, tel que $g'(c) = 0$ et (1) est alors vérifiée.

— si $g(b) \neq g(a)$, considérons la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) .$$

φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle ; donc il existe $c \in]a, b[$, tel que:

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

3.5. Applications

3.5.1. Fonctions monotones

Proposition — Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$:

(i) si $f'(x) = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est constante sur I;

(ii) si $f'(x) > 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est strictement croissante sur I;

(iii) si $f'(x) \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est croissante sur I;

(iv) si $f'(x) < 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est strictement décroissante sur I;

(v) si $f'(x) \leq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est décroissante sur I.

La démonstration, facile, est laissée au lecteur (on appliquera le théorème des accroissements finis).

3.5.2. Calculs d'approximations

Le théorème des accroissements finis peut être appliqué pour calculer une valeur approximative d'une fonction en un point, et estimer l'erreur ainsi commise.

Exemple. Calculer $\sqrt{105}$.

On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ entre les points $a = 100$ et $b = 105$: on a :

$$\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{5}{2\sqrt{c}} \qquad 100 < c < 105$$

de $10 < \sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121} = 11$ on tire :

$$\frac{5}{2 \times 11} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2 \times 10}$$

et $10.22 < \sqrt{105} < 10.25$.

On peut encore améliorer cet encadrement : en effet de $\sqrt{105} < 10.25$ on tire que $\sqrt{c} < 10.25$ donc

$$0.243 < \frac{5}{2 \times (10.25)} < \sqrt{105} - 10$$

d'où

$$10.243 < \sqrt{105} < 10.250$$

3.5.3. Localisation des racines d'une fonction

Soient deux fonctions f et g telles que $f'(x) = g(x)$. Alors entre deux racines de f il existe au moins une racine de g (théorème de Rolle). Ainsi si $g(x) = \cos x$ et $f(x) = \sin x$, on déduit qu'entre deux racines de $\sin x$ il existe au moins une racine de $\cos x$. Mais de $g'(x) = -\sin x = -f(x)$, on conclut qu'entre deux racines de $\cos x$, il existe au moins une racine de $\sin x$. D'où les racines de $\cos x$ et $\sin x$ alternent dans $\mathbb{R}$.

3.5.4. Règles de l'Hôpital

Les deux théorèmes qui suivent sont très utiles pour évaluer certaines limites, et en particulier étudier les indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $0 \times \infty$.

3.5.4.1. Théorème (règle de l'Hôpital pour $\frac{0}{0}$)

Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, telles que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, et $f(a) = g(a) = 0$. Dans ce cas :

$$\boxed{\text{si} \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A}$$

Preuve — On suppose tout d'abord $-\infty < A < +\infty$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x_0, tel que $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon$, pour $a < x < x_0$. D'après le théorème de Cauchy 3.4.3, appliqué à l'intervalle $[a, x]$, il existe $c \in]a, x[$ tel que

$$= \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

d'où $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon$ (1), si $a < x < x_0$. D'où le résultat.

Dans le cas où $A = +\infty$ (resp. $-\infty$) l'inégalité (1) est remplacée par $\frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon}$ ou $\frac{f'(x)}{g'(x)} < -\frac{1}{\varepsilon}$ et le raisonnement est alors le même.

3.5.4.2. Théorème (règle de l'Hôpital pour $\frac{\infty}{\infty}$)

Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ continues et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que f et g admettent des limites infinies au point a.

Si $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ et $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Preuve — On suppose tout d'abord $-\infty < A < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe x_0 tel que $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon$ pour $a < x < x_0$ (1).

Soit $D(x, x_0)$ défini par :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} D(x, x_0)$$

où $D(x, x_0) = \dfrac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}$ et $\lim\limits_{x \to a} D(x, x_0) = 1$. (*)

D'après le théorème de Cauchy appliqué à $[x, x_0]$, il existe un point $c \in]x, x_0[$ tel que :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} D(x, x_0) = \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} [D(x, x_0) - 1]$$

l'égalité (*) implique qu'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a + \gamma[$, $|D(x, x_0) - 1| < \varepsilon$. Il en résulte que pour tout $x \in]a, a + \gamma[$, on a

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| |D(x, x_0) - 1| < \varepsilon + \varepsilon\,(|A| + \varepsilon) \tag{2}$$

D'où le résultat.

Si $A = +\infty$,

$$(1) \text{ est remplacé par } \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} > \frac{1}{\varepsilon}$$

et

$$(2) \text{ est remplacé par } \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{1}{2} > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

3.5.4.3. Remarques

1) Les théorèmes 3.5.4.1 et 3.5.4.2 sont encore valables si $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ainsi que dans les cas où $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

2) La condition $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ est une condition suffisante pour que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$, mais ce n'est pas une condition nécessaire.

Exemple. — Soit $f(x) = x^2 sin\dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, et $g(x) = x$. On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

alors que $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$.

3.5.4.4. Exemples

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$;

de même $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{nx^n} = 0.$

3) $\lim\limits_{x \to 0+} x^n \log x = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\log x}{\frac{1}{x^n}} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n-1}}} = 0 = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x^n}{n} = 0.$

3.5.5. Convexité des graphes

Le plan $\mathscr{P}$ étant rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on dira qu'un point M_1 d'ordonnée y_1 est « au dessus » d'un point M_0 d'ordonnée y_0 si $y_1 \geq y_0$.

Soit A un sous-ensemble de $\mathscr{P}$. On dira qu'un point M d'abscisse x_M est au-dessus de A (resp. au-dessous de A), si A contient des points d'abscisse x_M et si M est au dessus (resp. au-dessous) de tout point de A d'abscisse x_M.

3.5.5.1. Définition

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite *convexe*, si pour tout couple de points M_1, M_2 d'abscisses x_1, x_2 du graphe de f, tout point M du graphe de f d'abscisse $x \in [x_1, x_2]$, est au-dessous du segment $[M_1 M_2]$.

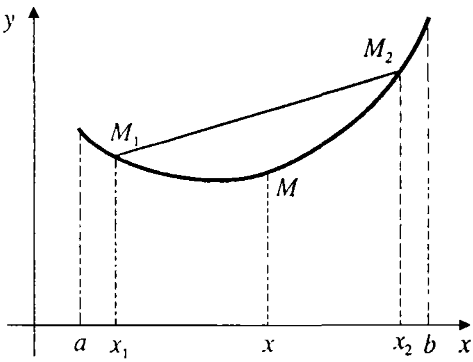


FIGURE: 3.5.5.1

3.5.5.2. Remarque

Il est facile de montrer que la définition 3.5.5.1 est équivalente à : f est convexe sur $[a, b]$ si pour tout couple de nombres réels x_1 et x_2 de

$[a, b]$, *et tout réel* λ *tel que* $0 \leq \lambda \leq 1$, *on a :*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \qquad (1)$$

(1) est dite ***inégalité de convexité.***

3.5.5.3. Définition

Une partie A de $\mathscr{P}$ est dite convexe si elle contient tout segment $[PQ]$ dont elle contient les extrémités P et Q.

3.5.5.4. Remarque

On pourra aisément démontrer, à titre d'exercice, qu'une fonction f est convexe si et seulement si l'ensemble A des points de $\mathscr{P}$ situés au-dessus du graphe de f est convexe.

Dans le cas où f est dérivable, on a le résultat suivant :

3.5.5.5. Théorème

Soit f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si f' est croissante sur $]a, b[$, alors f est convexe sur $[a, b]$. Réciproquement si f est convexe sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors f' est croissante sur $]a, b[$.

Preuve — Soient x et y deux points de $[a, b]$, avec $x < y$ et soit $z = \alpha y + (1-\alpha)x$, avec $0 < \alpha < 1$. On veut montrer que $f(z) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x)$, ou, ce qui revient au même, que :

$$(1-\alpha)\,[f(z) - f(x)] \leq \alpha\,[f(y) - f(z)]$$

D'après le théorème des accroissements finis il existe c et d, $x < c < z$ et $z < d < y$ tel que :

$$f(z) - f(x) = f'(c)(z-x)$$
$$f(y) - f(z) = f'(d)(y-z)$$

f' étant croissante on a : $f'(c) \leq f'(d)$ et puisque $(1-\alpha)(z-x) = \alpha(y-z)$ on déduit que :

$$(1-\alpha)\,[f(z) - f(x)] = (1-\alpha)f'(c)(z-x) \leq \alpha f'(d)(y-z) = \alpha\,[f(y) - f(z)]$$

d'où le résultat.

Réciproquement — Si f est convexe sur $[a, b]$, alors en tout point de $]a, b[$, f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite telles que :

$$f'_g(x_1) \leq f'_d(x_1) \leq f'_g(x_2) \leq f'_d(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in]a, b[\text{ et } x_1 < x_2 \qquad (2)$$

(voir exercice 7).

Si f est dérivable sur $]a, b[$, alors $f'_d(x) = f'_g(x) = f'(x)$, la croissance de f' résulte alors de (2).

3.5.5.6. Remarque

On peut montrer que le graphe de toute fonction convexe, dérivable, est au-dessus de chacune de ses tangentes.

En effet l'équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

On veut montrer que

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) \geq 0.$$

D'après le théorème des accroissements finis, on a:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c) \quad \text{où } c \text{ est compris entre } x_0 \text{ et } x.$$

L'inégalité à démontrer est alors :

$$(x - x_0)(f'(c) - f'(x_0)) \geq 0.$$

Elle résulte du fait que f' est croissante.

3.6. Théorème des fonctions inverses

Soit $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A tout point $y \in f(S)$ on associe

$$e_y = \{x \in S, \ f(x) = y\}.$$

Si pour tout $y \in f(S)$, $e_y = \{x\}$, on définit alors une application

$$\begin{aligned} \varphi : f(S) &\to S \\ y &\mapsto x \quad \text{tel que} \quad e_y = \{x\} \end{aligned}$$

φ s'appelle la *fonction inverse* ou *réciproque* de f. Le problème des fonctions inverses est de trouver les conditions suffisantes sur f, pour assurer l'existence de φ et dire quand φ est continue (resp. dérivable) si f est continue (resp. dérivable).

En général ce problème n'admet pas de solution globale, comme le montre l'exemple de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

qui n'est pas inversible sur $\mathbb{R}$ tout entier mais seulement sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_-$.

3.6.1. Théorème

Soit f une fonction numérique, de domaine de définition $D_f \subseteq \mathbb{R}$ vérifiant dans un intervalle I $(I \subseteq D_f)$ les conditions suivantes :

1) f est continue sur I

2) f est strictement monotone sur I.

Il existe, alors, une fonction unique φ telle que :

$D\varphi = f(I) = J$ est un intervalle,

$f(\varphi(y)) = y$ pour $y \in J$.

$\varphi(y) \in I$.

φ est continue et strictement monotone (dans le même sens de monotonie que f) sur J. φ est appelée une *détermination de la fonction réciproque de φ associée à I.*

Si de plus, $f'(x_0)$ existe en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$, alors φ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration

i) Si f est continue sur l'intervalle I, d'après 2.8.1, $f(I) = J$ est un intervalle.

ii) Supposons f strictement croissante sur I, alors f admet une fonction réciproque φ définie sur $J = f(I)$ et strictement croissante sur J. En effet si $y_1 \in J$, il existe $x_1 \in I$ tel que $y_1 = f(x_1)$, et il n'existe pas un autre $x_2 \neq x_1$ tel que $f(x_2) = y_1$: si $x_2 \neq x_1$, ou bien $x_2 > x_1$ et on a $f(x_2) > f(x_1)$, ou bien $x_2 < x_1$ et on a $f(x_2) < f(x_1)$. En posant $x_1 = \varphi(y_1)$, on définit une fonction sur J vérifiant l'égalité $f(\varphi(y)) = y$, $\forall y \in J$. De plus φ est strictement croissante car si $x_1 = \varphi(y_1)$ et $x_2 = \varphi(y_2)$, $y_2 - y_1$ et $x_2 - x_1$ sont de même signe.

iii) Montrons que φ est continue sur J. Supposons encore que f est strictement croissante. Soit $y_0 \in J$, il faut montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists h > 0$, tel que :

$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon.$$

Posons $x_0 = \varphi(y_0) \iff y_0 = f(x_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$, choisissons un entier n tel que :

$$\left[x_0 - \frac{\varepsilon}{n}, x_0 + \frac{\varepsilon}{n}\right] \subset I.$$

Par suite de la croissance stricte de f, on a

$$f\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{n}\right) = y_0 + c \quad (\text{avec } c > 0) \text{ et } \quad f\left(x_0 - \frac{\varepsilon}{n}\right) = y_0 - d \quad (\text{avec } d > 0).$$

Choisissons un nombre $\eta > 0$, tel que :

$$[y_0 - \eta, y_0 + \eta] \subset]y_0 - d, y_0 + c[\subset J.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, et de la stricte croissance de f, pour tout $y \in]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$ il existe un et un seul point

$$x \in \left]x_0 - \frac{\varepsilon}{n}, x_0 + \frac{\varepsilon}{n}\right[\quad \text{tel que} \quad y = f(x) \iff x = \varphi(y)$$

d'où
$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon.$$

iv) On suppose que $f'(x_0)$ existe en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$. Soit $y_0 = f(x_0) \iff x_0 = \varphi(y_0)$, on cherche la limite, si elle existe, du rapport $\dfrac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k}$ quand $k \to 0$. Si k est assez petit, $y_0 + k$ est une valeur prise par f. On pose $h = \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)$. Alors $x_0 = \varphi(y_0)$ et $\varphi(y_0 + k) = x_0 + h \Rightarrow f(x_0 + h) = y_0 + k$. D'où $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$.

$$\text{si } h \to 0 \text{ on a } k \to 0 \quad (f \text{ est continue en } x_0)$$
$$\text{si } k \to 0 \text{ on a } h \to 0 \quad (\varphi \text{ est continue en } y_0)$$

par suite

$$\lim_{k\to 0} \frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

3.6.2. Exemple

Soit $f(x) = x^3 - 2x + 1$. La restriction de f à l'intervalle $\left]\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$ admet une fonction réciproque Φ. Calculons $\Phi'(0)$ et $\Phi'(5)$. $f'(x) = 3x^2 - 2$. Donc f est strictement croissante sur $\left]\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$.

On sait que $\Phi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$. $f(1) = 0 \iff 1 = \Phi(0)$, et puisque $f'(1) = 1$ on obtient $\Phi'(0) = \dfrac{1}{f'(1)} = 1$.

De même $f(2) = 5 \iff 2 = \Phi(5)$, et puisque $f'(2) = 10$ on a $\Phi'(5) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{10}$.

3.6.3. Applications

3.6.3.1. Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques.

THÉORÈME ET DÉFINITIONS

Les restrictions respectives des fonctions sinus, cosinus et tangente aux intervalles $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[0, \pi]$ et $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ admettent des fonctions réciproques, appelées Arcsinus, Arccosinus et Arctangente, définies et continues sur $[-1, +1]$ pour les deux premières et sur $]-\infty, +\infty[$ pour la dernière.

Elles vérifient les propriétés suivantes :

(1) $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$; $\quad -\dfrac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arcsin} x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

(2) $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$; $\quad 0 \leq \operatorname{Arccos} x \leq \pi$.

(3) $\operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} x) = x : \qquad -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Arctg} x < \dfrac{\pi}{2}.$

De plus, Arcsin, Arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et Arctg sur $\mathbb{R}$.

(4) $(\operatorname{Arcsin} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall x \in]-1,1[.$

(5) $(\operatorname{Arccos} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall x \in]-1,1[.$

(6) $(\operatorname{Arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad \forall x \in]-\infty,+\infty[.$

D'où les courbes représentatives :

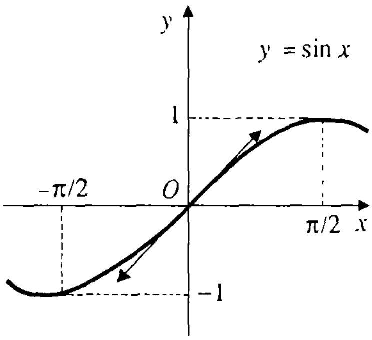


FIGURE: 3.6.3.1A

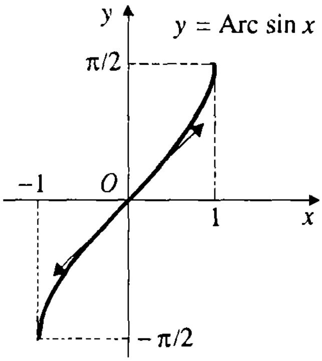


FIGURE: 3.6.3.1B

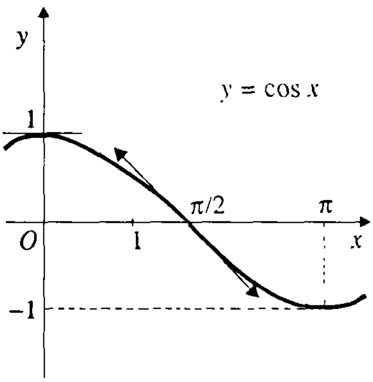


FIGURE: 3.6.3.1C

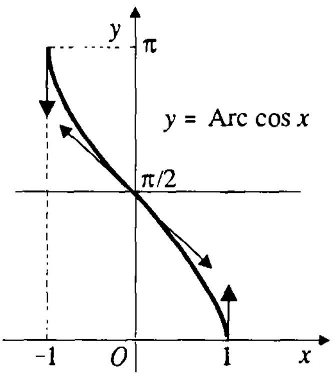


FIGURE: 3.6.3.1D

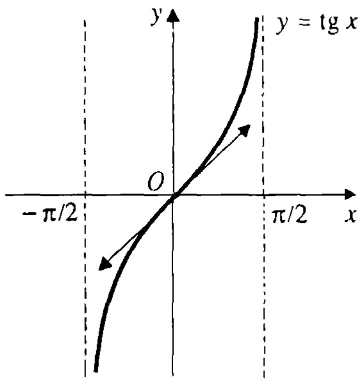


FIGURE: 3.6.3.1E

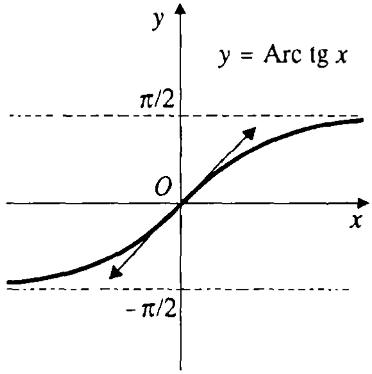


FIGURE: 3.6.3.1F

Démonstration — Faisons la démonstration pour la fonction sinus. La fonction sinus est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sa dérivée, $\cos x$, étant strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (Proposition 3.5.1). D'après le théorème 3.6.1, elle admet une fonction réciproque notée Arcsin, définie, continue et strictement croissante sur l'intervalle $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ et vérifiant :

$$\sin(\text{Arcsin}\, x) = x \quad \text{pour } x \in [-1, 1],$$
$$\text{Arcsin}\,(\sin y) = y \quad \text{pour } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

De plus en tout point $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $(\sin y)' = \cos y \neq 0$. Donc d'après le théorème 3.6.1, Arcsin x est dérivable sur $]-1, 1[$, et on a :

$$(\text{Arcsin}\, x)' = \frac{1}{\cos y}, \quad \text{avec} \quad x = \sin y, \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Par suite : $(\text{Arcsin}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Un raisonnement analogue pourra être fait pour les autres fonctions.

3.6.3.2. Les fonctions hyperboliques et leurs fonctions réciproques

Notations :

cosinus hyperbolique = ch

sinus hyperbolique = sh

tangente hyperbolique =

Argument cosinus hyperbolique = Argch

Argument sinus hyperbolique = Argsh

Argument tangente hyperbolique = Argth

THÉORÈME ET DÉFINITION

Les fonctions sh, ch et sont définies par les formules suivantes :

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \; ; \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \; ; \quad x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

sh et sont inversibles sur $]-\infty, +\infty[$ et leurs fonctions réciproques sont notées Argsh et Argth. La restriction de ch à l'intervalle $[0, +\infty[$ admet une fonction réciproque notée Argch.

Les fonctions Argsh, Argch et Argth sont définies et continues respectivement sur $]-\infty, +\infty[$, $[1, +\infty[$ et $]-1, 1[$. En outre :

$$(\operatorname{Argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \forall x \in]-\infty, +\infty[$$

$$(\operatorname{Argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall x \in]1, +\infty[$$

$$(\operatorname{Argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \qquad \forall x \in]1, +1[.$$ **Commentaires**

(i) Des formules évidentes :

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$

on déduit la formule fondamentale :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

(ii) $\operatorname{ch} x$ est paire, $\operatorname{sh} x$ et x sont impaires. Pour $x > 0$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et x ont des valeurs positives.

(iii) ch, sh et sont dérivables et :

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \; ; \; (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \; ; \; (x)' = 1 - {}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

quand x croît de 0 à $+\infty$, $\operatorname{ch} x$ croît de 1 à $+\infty$, $\operatorname{sh} x$ de 0 à $+\infty$ et x de 0 à 1.

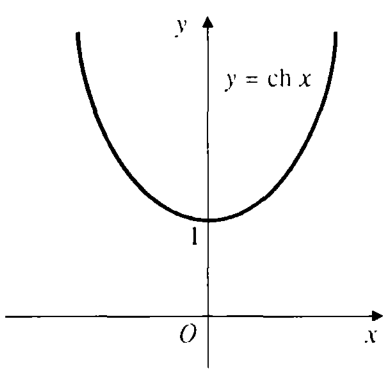


FIGURE: 3.6.3.2A

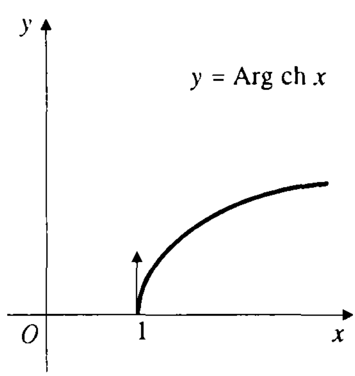


FIGURE: 3.6.3.2B

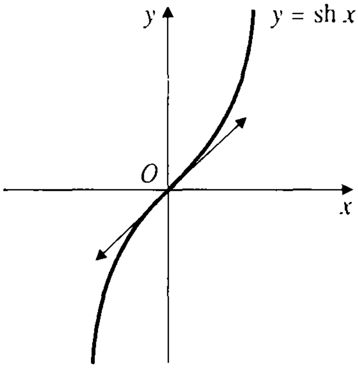


FIGURE: 3.6.3.2c

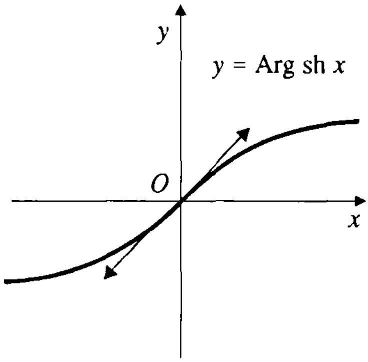


FIGURE: 3.6.3.2d

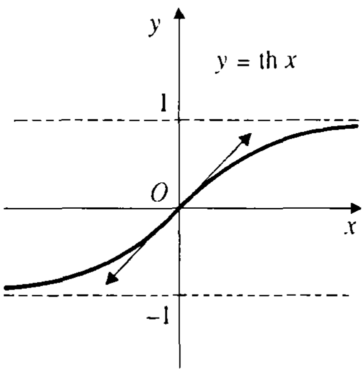


FIGURE: 3.6.3.2e

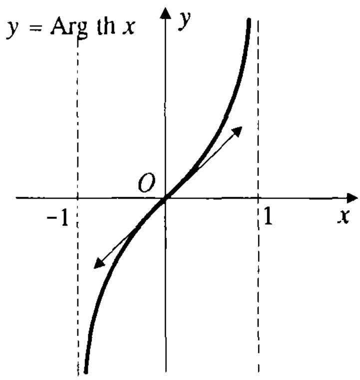


FIGURE: 3.6.3.2f

(iv) La fonction ch x est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, sa dérivée sh x sur $]0, +\infty[$ est strictement positive. D'après le théorème 3.6.1, elle admet une fonction réciproque, notée Argch, définie, continue et strictement croissante sur $\mathrm{ch}([0, +\infty[) = [1, +\infty[$.

De plus en tout point $y \in]0, +\infty[$ $(\mathrm{ch}\, y)' = \mathrm{sh}\, y \neq 0$. Donc d'après le théorème 3.6.1., Argch x est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a :

$$(\mathrm{Argch}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{sh}\, y} \quad \text{avec} \quad x = \mathrm{ch}\, y, \quad y \in]0, +\infty[$$

Par suite : $(\mathrm{Argch}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. $\quad (\mathrm{ch}^2\, y - \mathrm{sh}^2\, y = 1)$.

Un raisonnement analogue pourra être fait pour l'étude de Argsh et Argth.

v) Les fonctions Argsh, Argch, et Argth peuvent se mettre sous forme de logarithmes népériens :

$$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
$$\operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Démontrons, par exemple, la première formule.

$$y = \operatorname{Argsh} x \iff x = \operatorname{sh} y$$

de $\operatorname{ch}^2 y = \operatorname{sh}^2 y + 1 = 1 + x^2$ on tire $\operatorname{ch} y = \sqrt{1+x^2}$ car $\operatorname{ch} y > 0$, d'où $e^y = \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y = x + \sqrt{1+x^2}$ et $y = \ln\,(x + \sqrt{1+x^2})$.

3.7. Suites de fonctions différentiables

Soit (f_n) une suite fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a vu, dans le chapitre précédent, que toute limite uniforme de fonctions continues est continue.

L'exemple suivant montre que cette condition n'est pas suffisante si on remplace la propriété de continuité par celle de dérivabilité : considérons la suite de fonctions définies par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} - \dfrac{1}{n}$. Pour tout n, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la suite (f_n) converge sur $\mathbb{R}$ (uniformément sur tout intervalle $[a,b]$) vers $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.

D'ailleurs le théorème d'approximation [exercice 26, Chapitre 2] de Weierstrass affirme que toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes, qui sont dérivables.

En outre le même Weierstrass a donné un exemple d'une suite de fonctions dérivables qui converge sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point.

Remarquons que la suite de fonctions dérivables

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin n\pi x$$

converge vers la fonction dérivable $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, alors que la suite des dérivées $f_n'(x) = \cos n\pi x$ ne converge pas.

Le théorème important suivant donne des conditions suffisantes sur la suite (f_n), dont la principale est la convergence uniforme de la suite des fonctions dérivées (f_n'), qui entraînent la dérivabilité de f.

3.7.1. Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions définies et dérivables sur un intervalle I borné, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose :

— qu'en un point x_0 de I, la suite $(f_n(x_0))$ converge.

— la suite des fonctions dérivées (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g. Dans ce cas, la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f dérivable sur I, telle que $f' = g$.

Démonstration — Soient a, b $(a < b)$ les extrémités de I et $x \in I$. Si m, n sont deux entiers, on applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f_m - f_n$ sur l'intervalle d'extrémités x_0, x. Il existe un point y (dépendant de m et n) entre x_0 et x tel que :

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)\,(f'_m(y) - f'_n(y))$$

d'où

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a)\,|f'_m(y) - f'_n(y)| \qquad (1)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) > 0$, tel que pour m, $n \geq n_0$ on a : $|f'_n(x) - f'm(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $\forall x \in I$ (convergence uniforme de (f'_n) sur I)

Pour $\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\exists n_1(\varepsilon, x_0)$, entier positif, tel que si m, $n \geq n_1$ on a :

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(convergence de } (f_n(x_0))\text{)}.$$

D'où, si $n_2 = \sup(n_1, n_0)$, alors pour m, $n \geq n_2$, on a d'après (1) $|fm(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in I$ (voir exercice 12, Chap. 2).

Donc la suite (f_n) converge uniformément vers f, et puisque les f_n sont continues, alors f est continue sur I (théorème 2.9.2.9). Pour établir l'existence de la dérivée de f en un point c de I, on applique le théorème des accroissements finis à $f_m - f_n$ sur l'intervalle d'extrémités c et x.

Donc il existe un point z (dépendant de m et n) tel que :

$$(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(c) - f_n(c)) = (x - c)\,(f'_m(z) - f'_n(z)).$$

Donc pour $c \neq x$, on a,

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq |f'_m(z) - f'_n(z)| \qquad (2)$$

la convergence uniforme de (f'_n) entraîne : pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists M(\varepsilon)$, tel que si m, $n \geq M$, on a :

$$|f'_m(z) - f'_n(z)| < \varepsilon. \quad \forall z \in I.$$

Donc pour m, $n \geq M$, (2) entraîne :

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x)) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \varepsilon. \qquad (3)$$

Si m tend vers $+\infty$, (3) entraîne :

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x))-f_n(c)}{x-c}\right| \leq \varepsilon. \tag{4}$$

D'autre part il existe $N(\varepsilon)$, tel que si $n \geq N$, on a

$$|f_n'(c) - g(c)| < \varepsilon, \text{ pour tout } c \in I \tag{5}$$

(convergence uniforme de (f_n') vers g).

Soit $N_0 = \sup(N, M)$ il existe $\delta_{N_0}(\varepsilon) > 0$ tel que si $0 < |x-c| < \delta$, on a :

$$\left|\frac{f_{N_0}(x) - f_{N_0}(c)}{x-c} - f_{N_0}'(c)\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

de (4), (5) et (6) on tire :

$$\text{si } 0 < |x-c| < \delta_{N_0}(\varepsilon), \quad \text{alors } \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c)\right| < 3\varepsilon.$$

3.7.2. Remarques

i) on a vu [théorème 2.9.29] que si une suite $\{f_n\}$ de fonctions continues converge uniformément vers f, alors f est continue, ce qui peut se traduire par :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to+\infty}(f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) \tag{1}$$

(1) traduit que la continuité est « transparente » par rapport à la notion de limite.

ii) de même sous les hypothèses du théorème 3.7.1 on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\lim_{n\to+\infty}(f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}f_n(x)\right)$$

la dérivation est « transparente » par rapport à la notion de limite. Les propriétés (i) et (ii) sont intimement liés à la notion de la convergence uniforme. On verra un autre exemple dans le chapitre sur l'intégration.

iii) Le théorème 3.7.1 est un moyen puissant pour définir de nouvelles fonctions, nous en donnerons des exemples dans le § 3.9.

3.8. À RETENIR

i) f est dérivable en x_0 si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{f(x_0+h) - f(x_0) = hA + h\varepsilon(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0}$$

A est par définition la dérivée de f en x_0, notée $f'(x_0)$.

ii) L'application $h \to f'(x_0)h$ est appelée la différentielle de f en x_0, notée $\mathrm{d}f(x_0)$ ou simplement $\mathrm{d}f$. $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ où $\mathrm{d}x$ est la différentielle de l'application identique $h \to h$ on a:

$$\boxed{*\mathrm{d}f = \mathrm{d}*f}$$

où $*$ le changement de variable $*x = g(z)$, dérivable, qu'on effectue dans $f'(x)$.

iii) *Théorème des accroissements finis*

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Alors: $\forall a$, $b \in I$, $\exists c \in]a, b[$, tel que, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

iv) *Théorème des fonctions inverses*

Soit f une fonction numérique vérifiant dans un intervalle I ($I \subset D_f$) les conditions suivantes :

1) f continue sur I

2) f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Il existe une fonction unique φ telle que

$D\varphi = f(I) = J$ est un intervalle.

$f(\varphi(y)) = y \ \forall y \in J$ et $\varphi(y) \in I$.

φ est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur J.

φ est une détermination de la fonction réciproque de f associée à I.

Si de plus f admet une dérivée $f'(x) \neq 0$ alors φ admet également une dérivée au point $y = f(x)$ et $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

v) *Suite de fonctions différentiables*

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies et dérivables sur un intervalle borné I. Si $(f_n(x_0))$ converge pour un $x_0 \in I$ et $\{f_n'\}$ converge uniformément sur I vers g alors :

— (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f, dérivable sur I, telle que : $f' = g$.

3.9. Exercices et problèmes

1) Soient k un nombre réel et f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + kx \quad \text{si } x \neq 0, \quad \text{et } f(0) = 0.$$

a) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en tout point de $\mathbb{R}$.

b) On suppose $0 < |k| < 1$. Démontrer que pour tout nombre réel $\alpha > 0$, la fonction dérivée f' change de signe sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$. La fonction $x \to f'(x)$ est elle continue sur $\mathbb{R}$?

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[4]{|x|}}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et } f(0) = 0.$$

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f' est continue mais n'est pas bornée.

3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f.

b) f' est elle continue, bornée?

4) Montrer que la fonction h définie sur l'intervalle $]2, +\infty[$ par $h(x) = x^3 - 3x^2$ admet une fonction réciproque φ strictement croissante et dérivable ; déterminer l'intervalle de définition de φ. Calculer $\varphi(-2)$ et $\varphi'(-2)$.

5) La lumière émanant d'un point source S illumine une surface circulaire C, avec une intensité proportionnelle au cosinus de l'angle θ d'incidence et inversement proportionnelle au carré de la distance d à la source (voir figure).

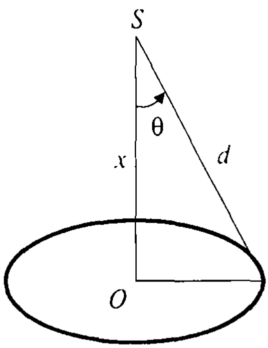


FIGURE: 3.9.5

A quelle distance x doit-on placer la source lumineuse S au-dessus du centre d'un disque de 12 cm de rayon pour que l'illumination soit maximale?

6) a) Montrer que la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ est indéfiniment dérivable et vérifie $g^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \geq 1$.

b) Soit $a > 0$. $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f est nulle sur $]-a, a[$, alors f est aussi nulle sur $[-a, a]$.

c) On suppose que f est indéfiniment dérivable sur $[-a, a]$ et que :

i) $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \geq 1$;

ii) il existe $\rho > 0$ tel que $\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!} \leq \rho^n$ pour tout $x \in [-a, a]$ et pour tout $n \geq 1$. Montrer que f est nulle sur $[-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}]$.

d) On suppose que a est de la forme $\dfrac{k}{\rho}$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Déduire de b) que f est nulle sur $[-a, a]$.

7) Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I, si $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{1}{2}\left[f(x) + f(y)\right]$ pour tout couple (x, y) de $I \times I$.

a) On suppose f continue et convexe sur I.

i) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right]$$

pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de I.

ii) Montrer que si $x, y \in I$ et si $t \in [0, 1]$, alors

$$f\left((1-t)x + ty\right) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

iii) Montrer que si $x < y < z$ sont des éléments de I, alors

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

En déduire que si $w < x < y < z$ sont des éléments de I, alors

$$\frac{f(x) - f(w)}{x - w} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

iv) Montrer que f possède une dérivée à gauche et une dérivée à droite, et que les points x de I tels que $f'(x)$ n'existe pas constituent un ensemble dénombrable.

Chapitre 4 : APPROXIMATION POLYNÔMIALE D'UNE FONCTION

Introduction

Les polynômes font partie des fonctions les plus simples qu'on rencontre en analyse. Leurs valeurs en un point sont aisément calculables par des opérations algébriques élémentaires. Dans ce chapitre, on cherche à approcher une fonction par un polynôme ; et si la différence entre la fonction et son polynôme d'approximation est assez petite, alors en peut dans certains cas pratiques remplacer les calculs sur la fonction, par des calculs sur son polynôme associé.

Il existe plusieurs manières d'approcher une fonction par des polynômes, suivant l'usage qu'on veut faire de cette approximation. Dans certains cas, la fonction considérée est définie par une expression mathématique ou, plus fréquemment, par une suite de valeurs prises en des points distincts $x_i, f_i = f(x_i), i \in \{0, 1, 2 \ldots, n\}$ (f est dite alors échantillonnée ou discrétisée).

Pour de nombreuses questions, il est alors utile d'approcher f par une fonction *polynômiale P convenablement choisie* tel que $P(x_i) = f_i$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Cette approche peut être réalisée soit sur un intervalle $[a, b]$, soit sur un voisinage d'un point x_0.

4.1. Approximation polynômiale sur $[a, b]$

4.1.1. Interpolation (méthode de Lagrange)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Connaissant les valeurs $f_0, \ldots, f_n$, de f aux points $x_0, \ldots, x_n$, de $[a, b]$ on cherche un polynôme P_n de degré n tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i) \; ; \qquad i = 1 \ldots n.$$

Ces équations déterminent le polynôme P_n, appelé *polynôme de Lagrange*. En écrivant P_n sous la forme :

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) + a_1(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

on obtient le système d'équations :

$$P_n(x_0) = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n) = f_0$$
$$\vdots$$
$$P_n(x_n) = a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) = f_n$$

qui détermine les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$.

En introduisant les polynômes

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

On obtient $P_n(x)$ sous la forme :

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)}$$

Exemple — Donner l'interpolation parabolique ($n = 2$) *de* $f(x) = \sin x$ *sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$. Soit $x_0 = 0, x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ et $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$. On a :

$$P_2(x_0) = f(0) = 0$$
$$P_2(x_1) = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$P_2(x_2) = f(\frac{\pi}{2}) = 1$$

d'où
$$L_1(x) = -\frac{16}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{2})$$
$$L_2(x) = \frac{8}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{4})$$

et
$$P_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\frac{16}{\pi^2}) \cdot x \cdot (x - \frac{\pi}{2}) + \frac{8}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{4}).$$

4.2. Approximation polynômiale au voisinage d'un point x_0 : Polynôme de Taylor

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On sait que si f est dérivable en x_0, elle peut être approchée au voisinage de x_0 par une fonction affine φ (un polynôme de degré 1) :

$$\varphi(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

avec,

$$f(x_0) = \varphi(x_0) \qquad \text{et} \qquad f'(x_0) = \varphi'(x_0).$$

Plus généralement on cherche, dans le cas où f est dérivable en x_0 jusqu'à l'ordre n, $n \geq 1$, un polynôme $P(x)$ de degré $\leq n$ tel que :

$$P(x_0) = f(x_0), \qquad P'(x_0) = f'(x_0), \dots \qquad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

En écrivant ce polynôme sous la forme

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

on voit que la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $P(x)$ s'écrit :

$$P(k)(x) = k!a_k + (x - x_0)v(x), \qquad v(x_0) \neq 0$$

d'où $P^{(k)}(x_0) = k!a_k = f^{(k)}(x_0)$. Le polynôme cherché s'écrit donc :

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots \\ + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} \end{aligned}}$$

Ce polynôme est appelé *polynôme de Taylor* de degré $\leq n$ engendré par f au point x_0 et sera noté $P_n(x) = T_n f(x, x_0)$ ou $T_n f$ simplement.

4.2.1. Exemples

1) $f(x) = e^x$.

$$T_n f(x, o) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

2) $f(x) = \sin x$ *: on a* $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ *et* $f^{(2k)}(0) = 0$ *pour tout entier* k*. D'où*

$$T_{2n+1} f(x, 0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3) $f(x) = \cos x$*. On a de même*

$$T_{2n} f(x, 0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

4.2.2. Remarques

1) Les formules suivantes, facilement vérifiables, permettent de calculer de nouveaux polynômes de Taylor, à partir d'autres, connus. Les polynômes de Taylor qui suivent sont engendrés au même point x_0.

a) Propriété de linéarité

$$T_n(\lambda f + \eta g) = \lambda T_n(f) + \eta T_n(g).$$

b) Propriété de différentiation

$$(T_n f)' = T_{n-1}(f').$$

c) Propriété d'intégration

La primitive de $T_n f$ qui s'annule pour $x = x_0$ est égale à $T_{n+1}(g)$, où g est la primitive de f qui s'annule pour $x = x_0$.

2) Soit P_n un polynôme de degré $n \geq 1$.

Soient f et g deux fonctions dérivables à l'ordre n telles que :

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n g(x)$$

où $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $T_n(f) = P_n(x)$.

4.2.3. Exemples

On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \text{ pour } x \neq 1$$

comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$, *d'après 4.2.2.2)*

$$T_n\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \tag{1}$$

et d'après 4.2.2.c) $(1 - x > 0)$

$$T_{n+1}\left[-\ln(1-x)\right] = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2}$$

si dans (1) on remplace x par $-x^2$, on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} - (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}$$

donc

$$T_{2n}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} \tag{3}$$

et d'après 4.2.2.c)

$$T_{2n+1}(\text{Arctg}\, x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \tag{4}$$

4.3. Formule de Taylor

Dans ce paragraphe nous examinons l'erreur dans l'approximation d'une fonction f par son polynôme de Taylor $T_n(f)$.

Soit $E_n(x) = f(x) - T_n f(x)$. Le théorème qui suit donne une expression de $E_n(x)$. C'est une généralisation du théorème des accroissements finis.

4.3.1. Théorème de Taylor

Théorème : soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose, n étant un entier naturel donné, que f et ses dérivées f', f'', ..., $f^{(n)}$ sont définies et continues sur I, et $f^{(n+1)}$ est définie sur I.

Pour tout couple de points α, β de I il existe un réel γ, $\alpha < \gamma < \beta$ si $\alpha < \beta$, ou $\beta < \gamma < \alpha$ si $\beta < \alpha$ tel que :

$$\boxed{\begin{aligned} f(\beta) &= f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{1!}f'(\alpha) + \cdots \\ &\quad + \frac{(\beta-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\gamma) \end{aligned}} \tag{1}$$

Démonstration — On pose :

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \left[f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!}f'(\alpha) + \cdots + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha)\right]$$

on remarque que :

$$R_{n+1}(\alpha) = R'_{n+1}(\alpha) = \cdots = R^{(n)}_{n+1}(\alpha) = 0.$$

D'après le théorème des accroissements finis généralisé (3.4.3), il existe γ_1 compris entre α et β (ou entre β et α) tel que :

$$\begin{aligned} \frac{R_{n+1}(\beta)}{(\beta-\alpha)^{n+1}} &= \frac{R_{n+1}(\beta) - R_{n+1}(\alpha)}{(\beta-\alpha)^{n+1} - 0^{n+1}} \qquad (\text{si } \alpha < \beta\ ) \\ &= \frac{R_{n+1}(\alpha) - R_{n+1}(\beta)}{0^{n+1} - (\beta-\alpha)^{n+1}} = \frac{R'_{n+1}(\gamma_1)}{(n+1)(\gamma_1-\alpha)^n}. \end{aligned}$$

De même il existe γ_2 compris entre α et γ_1 ou entre γ_1 et α tel que

$$\begin{aligned} \frac{R_{n+1}(\beta)}{(\beta-\alpha)^{n+1}} = \frac{R'_{n+1}(\gamma_1)}{(n+1)(\gamma_1-\alpha)^n} &= \frac{R'_{n+1}(\gamma_1) - R'_{n+1}(\alpha)}{(n+1)(\gamma_1-\alpha)^n - 0^n} \qquad (\text{si } \alpha < \gamma_1) \\ &= \frac{R'_{n+1}(\alpha) - R'_{n+1}(\gamma_1)}{0^n - (n+1)(\gamma_1-\alpha)^n} \qquad (\text{si } \gamma_1 < \alpha) \\ &= \frac{R''_{n+1}(\gamma_2)}{n(n+1)(\gamma_2-\alpha)^{n-1}}. \end{aligned}$$

En itérant ce processus jusqu'à $n+1$ on aura

$$\frac{R_{n+1}(\beta)}{(\beta-\alpha)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\gamma_{n+1})}{(n+1)!}$$

où γ_{n+1} est compris entre α et β ou β et α ; d'où la formule (1) du théorème.

4.3.2. Remarques

1) La formule (1) de 4.3.1 est appelée formule de Taylor (ou de Taylor-Lagrange) à l'ordre $n+1$ et le terme $R_{n+1} = \dfrac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\gamma)$ est le reste de Lagrange.

2) Il en existe d'autres formes du reste. Mentionnons pour le moment la forme de Cauchy : il existe un nombre θ, $0<\theta<1$, tel que

$$R_{n+1} = (1-\theta)^n \frac{f^{(n+1)}((1-\theta)\alpha+\theta\beta)}{(n+1)!}(\beta-\alpha)^{n+1}$$

3) en posant $\beta = x$ la formule de Taylor s'écrit :

$$f(x) = T_n f(x,\alpha) + \frac{(x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\gamma)$$

où $T_n f(x,\alpha)$est le polynôme de Taylor associé à f, au point α.

4) en posant $x = \alpha + h$ et $\gamma = \alpha + \theta h \qquad 0<\theta<1$. On peut écrire :

$$f(x+h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(P)}(\alpha) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha+\theta h).$$

Si $\alpha = 0$ et $h = x$ on obtient la formule de Mac Laurin-Lagrange.

$$\boxed{f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(P)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \qquad 0<\theta<1}$$

5) si la dérivée d'ordre $(n+1)$de f satisfait les inégalités

$$m \le f^{(n+1)}(t) \le M$$

dans un intervalle contenant a, alors pour tout point x de cet intervalle on a les estimations suivantes du reste

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le R_{n+1}(x) \le M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{si } x>a$$

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le (-1)^{n+1} R_{n+1}(x) \le M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{si } x<a$$

Exemples

1) Calcul du nombre e.

Si $f(x) = \mathrm{e}^x$ *et* $a = 0$ *on a :*

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^{(\theta x)}.$$

Posons $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^{(\theta x)}$. *Sur* $[0, 1]$ *on a* $1 \le \mathrm{e}^{(\theta x)} \le \mathrm{e} < 3$.
D'où

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \le R_{n+1}(x) \le \frac{3x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour $x = 1$ *on a :*

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_{n+1}(1). \qquad \text{où} \qquad \frac{1}{(n+1)!} \le R_{n+1}(1) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Ceci nous permet de calculer le nombre e *avec une précision fixée à l'avance. Par exemple pour calculer* e *avec sept décimales exactes il suffit de choisir* n, *tel que:* $\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{2}10^{-8}$: $n = 12$ *convient.*

2) Irrationalité de e.

D'après l'exemple 1) on a

$$\frac{1}{(n+1)!} \le \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

en multipliant par $n!$ *on obtient*

$$\frac{1}{n+1} \le n!\,\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < \frac{3}{n+1} \le \frac{3}{4}. \qquad \text{si} \qquad n \ge 3 \qquad (1)$$

si e *était rationnel, on pourrait choisir* n *assez grand de sorte que* $n!\,\mathrm{e}$ *soit un entier et comme* $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ *est un entier. (1) exprime que la différence de ces deux entiers est un nombre positif qui ne peut excéder* $\frac{3}{4}$, *ce qui est impossible. Donc* e *est irrationnel.*

4.4. Développements limités

On a vu dans l'étude de la formule de Taylor que certaines fonctions peuvent être approchées par des polynômes.

Plus précisément, si $f, f', \ldots, f^{(n)}$ sont définies et continues dans un voisinage de 0 et $f^{(n+1)}$ existe et est bornée dans ce voisinage, alors dans ce voisinage, $f(x)$ s'écrit sous la forme :

$$f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x)$$

où $P_n(x) = T_n f(x)$ et $\epsilon(x) = \dfrac{x f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

Les conditions entraînent que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{P_n(x)} = 1$. On dit alors que $f(x)$ et $P_n(x)$ sont équivalentes au voisinage de 0 : autrement dit, f et P_n ont la même configuration au voisinage de 0.

Nous allons dans ce paragraphe faire une étude systématique des fonctions équivalentes à des polynômes au voisinage d'un point. On dira alors qu'elles admettent un développement limité en ce point.

4.4.1. Infiniment petits et infiniment grands

Définitions — Soit f une fonction numérique de variable réelle, définie au voisinage de x_0 (éventuellement on peut avoir $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$).

— Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, on dira que $f(x)$ est infiniment petit (notation : $I.P$) au voisinage de x_0.

— Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) on dira que $f(x)$ est un infiniment grand (notation : $I.G$) au voisinage de x_0.

— On dira que $f(x)$ et $g(x)$ sont deux $I.P.$ (resp. $I.G.$) simultanés au voisinage de x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$(\text{resp. } \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty).$$

— On dira que les deux $I.P.$ (resp. $I.G.$) $f(x)$ et $g(x)$ sont de même ordre au voisinage de x_0 s'il existe un réel différent de 0 tel que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a$. Si $a = 1$, on dira que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 (notation $f \sim g$).

Exemple : $(\sin x)^2$ et $3x^2$ sont deux $I.P.$ de même ordre au voisinage de 0.

Définitions — Lorsqu'on étudie des fonctions :

i) au voisinage de 0, x (resp. $\dfrac{1}{x}$) est appelé $I.P.$ principal (resp. $I.G.$ principal) ;

ii) au voisinage de l'infini : x (resp. $\dfrac{1}{x}$) est appelé $I.G.$ principal (resp. $I.P.$ principal) ;

iii) au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$: $(x - x_0)$. (resp. $\dfrac{1}{x - x_0}$) est appelé *I.P.* principal (resp. *I.G.* principal).

Si $f(x)$ est un *I.P.* (resp. *I.G.*) et α l'*I.P.* (resp. l'*I.G.*) principal, $f(x)$ dite d'ordre p par rapport à α si les deux *I.P.* (resp. *I.G.*) $f(x)$ et α^P sont de même ordre, c'est-à-dire si l'on a :

$$\lim \frac{f(x)}{\alpha^p} = a, \text{ avec } \quad a \neq 0.$$

Dans ce cas, $f(x) \sim a\alpha^p$ et $a\alpha^p$ est dite partie principale de $f(x)$.

4.4.1.1. Exemples

i) $\sin(x - x_0)$ *est un I.P. d'ordre 1 par rapport à* $x - x_0$ *au voisinage de* x_0.

ii) $1 - \cos x$*est un I.P. d'ordre 2 par rapport à* x *au voisinage de* 0.

iii) Si $1 \leq p \leq n$, $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_p x^p$ *est un I.G. (resp. I.P.) d'ordre* n *(resp. d'ordre* p*) relativement à* x *au voisinage de l'infini (resp. de 0), sa partie principale étant* $b_n x^n$ *(resp.* $b_P x^P$*).*

4.4.1.2. Remarque

Cette notion d'« ordre » d'une fonction ne s'applique pas à tous les *I.P.* (resp. *I.G.*). Par exemple a^x est un *I.G* au voisinage de $+\infty$, mais

$$\forall p \geq 1, \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

par suite on ne peut parler de son ordre.

La notion de développement limité d'une fonction au voisinage de x_0 généralise la notion d'ordre, dans la mesure où la fonction n'est pas nécessairement équivalente à une expression de la forme $a(x - x_0)^P$, mais à un polynôme en $x - x_0$.

4.4.1.3. Comparaison de fonctions

Définition — Soient $S \sim x_0$, $f : S \to \mathbb{R}$ et $g : S \to \mathbb{R}$ deux fonctions sur S. On dira que g est négligeable au voisinage de x_0 devant f et l'on notera $g = o(f)$ s'il existe une fonction ϵ définie sur S telle que $g(x) = f(x)\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

Propriétés :

— Si $g = o(f)$ et $h = o(g)$, alors $f = o(h)$.

— Si $g = o(f)$ et si h est bornée alors $gh = o(f)$.

Exemples :

— $x^{n+1} = o(x^n)$ au voisinage de 0, si $n \in \mathbb{N}$.

— Si $\alpha > 0$, alors $\operatorname{Log} x = o(x^\alpha)$ au voisinage de $+\infty$.

— Si $p \in \mathbb{N}$, alors $x^p = o(e^x)$ au voisinage de $+\infty$.

4.4.2. Développements limités au voisinage de 0

4.4.2.1. Définition

Soit $f(x)$ une fonction numérique à variable réelle définie dans un voisinage de 0 (sauf peut-être en 0). On dira que $f(x)$ admet un développement limité (notation $D.L.$) d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un intervalle I de centre 0 et un polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que pour tout $x \neq 0$, élément de I, on ait :

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + \epsilon(x)x^n.}$$

où $\varepsilon : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie : $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$. $P_n(x)$ est appelé partie régulière du $D.L.$ et $\epsilon(x)x^n$ le reste (ou le terme complémentaire).

Dans toute la suite, la notation $\epsilon(x)$ ou $\epsilon_i(x)$ désigne un infiniment petit au voisinage de 0.

4.4.2.2. Propriétés

1) Si $f(x)$ admet un $D.L.$ au voisinage du 0, et si la partie régulière $P_n(x)$ est non nulle, alors $f(x)$ est équivalente à $P_n(x)$ au voisinage de 0. En effet si

$$P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_p x^p \qquad 0 \leq p \leq n \qquad (x^0 = 1)$$

on a :

$$\frac{f(x)}{P_n(x)} = 1 + \frac{x^n \epsilon(x)}{a_n x^n + \cdots + a_p x^p} = \frac{x^{n-p}\epsilon(x)}{a_n x^{n-p} + \cdots + a_p} + 1$$

et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^{n-p}\epsilon(x)}{a_n x^{n-p} + \cdots + a_p} = 0.$

<u>Remarque</u> : il faut s'assurer que le polynôme $a_n x^n + \cdots + a_p x^p$ est non nul. Par exemple si $f(x) = e^{-1/x^2}$, $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k$, f admet un $D.L.$ d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$ ayant pour partie régulière le polynôme nul Θ. Cependant $f(x)$ est différent de 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où $fx)$ n'est pas équivalent à Θ.

2) Si $f(x)$ admet un $D.L.$ d'ordre n au voisinage de 0, elle admet au voisinage du même point, un $D.L.$ d'ordre q, si $q < n$. Soit en effet

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon(x).$$

On peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_q x^q + x^q \left[a_{q+1} x + \cdots + a_n x^{n-q} + x^{n-q}\epsilon(x)\right].$$

En posant $\epsilon_1(x) = a_{q+1} x + \cdots + a_n x^{n-q} + x^{n-q}\epsilon(x)$, on obtient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_q x^q + \epsilon_1(x) x^q.$$

Ainsi si $P_n(x)$ est la partie régulière du $D.L.$ à l'ordre n de $f(x)$, on obtient la partie régulière du $D.L.$ à l'ordre q de $f(x)$ en supprimant les monômes de $P_n(x)$ de degré strictement supérieur à q : on dit qu'on a « tronqué » $P_n(x)$ à l'ordre q et on la notera $D_q(P_n(x))$.

3) Si $f(x)$ admet un $D.L.$ à l'ordre $n(n \geq 0)$ en $x = 0$, la fonction n'étant pas supposée définie en $x = 0$, on a $\lim_{x \to 0} f(x) = P_n(0)$, et l'on pourra prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = P_n(0)$.

Ainsi $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de $D.L.$ en 0, par contre $x \sin \frac{1}{x}$ admet un $D.L.$ d'ordre 0 au voisinage de 0 avec $P_0(0) = 0$.

4) Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et continue en 0. Si f admet un $D.L.$ à l'ordre $n(n \geq 1)$ en 0, alors $f(x)$ est dérivable en 0 et $f'(0) = P_n'(0)$.

Ainsi $x \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de $D.L.$ en 0 d'ordre $n \geq 1$, par contre $x^2 \sin \frac{1}{x}$ admet un $D.L.$ d'ordre 1 en 0 avec $P_1(0) = 0$.

5) Si $f(x)$ admet un $D.L.$ d'ordre n en 0, alors sa partie régulière $P_n(x)$ est unique.

En effet si

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + x^n \epsilon(x) \\ &= Q_n(x) + x^n \epsilon_1(x) \end{aligned}$$

avec $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ et $Q_n(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$, on a :

$$a_n x^n + \cdots + a_0 + x^n \epsilon(x) = b_n x^n + \cdots + b_0 + x^n \epsilon_1(x) \ ;$$

en faisant tendre x vers 0, on obtient : $a_0 = b_0$; d'où en simplifiant par a_0 et en divisant par x les 2 membres on a :

$$a_n x^{n-1} + \cdots + a_1 + x^{n-1}\epsilon(x) = b_n x^{n-1} + \cdots + b_1 + x^{n-1}\epsilon_1(x).$$

on montre comme ci-dessus que $a_1 = b_1$.

En répétant ce processus on démontre que $a_i = b_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.

Application

— Si $f(x)$ est une fonction paire les termes de degré impair dans $P_n(x)$ sont nuls. En effet si f est paire, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + x^n \epsilon(x) \\ f(-x) &= P_n(-x) + x^n \left[(-1)\epsilon(x)\right] \\ &= P_n(-x) + x^n \epsilon_1(x) \end{aligned}$$

De $P_n(x) = P_n(-x)$ on déduit le résultat.

— De même si f est impair, les termes de degré paire dans $P_n(x)$ sont nuls.

4.4.2.3. Développements limités obtenus à partir de la formule de Mac-Laurin

a) Si $f, f' \ldots f^{(n)}$ sont définies et continues dans un voisinage V_0 de 0 et si $f^{(n+1)}$ est définie et bornée dans V_0, d'après la formule de Mac-Laurin on a :

$$f(x) = T_n f(x, o) + x^n \epsilon(x)$$

où $\epsilon(x) = \dfrac{x}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$.

Par suite f admet un $D.L.$ d'ordre n en 0 et sa partie régulière n'est autre que son polynôme de Taylor à l'ordre n en 0. On dira que le $D.L.$ *de f à l'ordre n est obtenu à partir de la formule de Mac- Laurin.*

b) On suppose que f admet un $D.L.$ à l'ordre n obtenu par la formule de Mac-Laurin. La fonction dérivée $g = f'$ vérifie les hypothèses de a) à l'ordre $n-1$ d'où

$$g(x) = g(0) + xg'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(0) + x^{n-1}\epsilon_1(x).$$

En revenant à f :

$$f'(x) = f'(0) + xf''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(0) + x^{n-1}\epsilon_1(x)$$

On peut donc conclure : si f admet un $D.L.$ d'ordre n, f' admet un $D.L.$ d'ordre $n-1$ et sa partie régulière est obtenue par dérivation de la partie régulière du $D.L.$ de f. On retrouve la formule $(T_n f)' = T_n f'$ (Remarques 4.2.2 b).

De même toute primitive F de f vérifie les hypothèses de a) à l'ordre $n+1$, d'où

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(0) + x^{n+1}\epsilon_2(x).$$

En revenant à f :

$$F(x) = F(0) + xf(0) + \frac{x^2}{2} f'(0) + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(0) + x^{n+1}\epsilon_2(x)$$

donc : si f admet un $D.L.$ d'ordre n, toute primitive F de f admet un $D.L.$ d'ordre $n+1$ et sa partie régulière est la primitive de la partie régulière de f qui pour $x = 0$ prend la valeur $F(0)$. On retrouve la propriété c) de 4.2.2.

4.4.2.4. Exemples

D'après les exemples 4.2.3, on a :

1) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$$

on en déduit par dérivation :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x + \cdots + nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon_1(x)$$

2) de $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$$

on déduit par intégration :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon_2(x)$$

3) de $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\epsilon_3(x)$$

on déduit par intégration :

$$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon_4(x)$$

4) on obtiendra de

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\epsilon_5(x)$$

le *D.L.* de :

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon_6(x)$$

5) Soit $\alpha \in Q$ et $f(x) = (1+x)^\alpha$.

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}. \qquad f'(0) = \alpha.$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}. \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1).$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))\,(1+x)^{\alpha-n}.$$
$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

d'où

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\epsilon(x).$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

6) En intégrant les développements de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, obtenus en appliquant 5), on obtient :

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots . 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon_1(x)$$

$$\operatorname{Argsh} x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots . 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon_1(x)$$

4.4.3. Opérations sur les développements limités

Si f (resp. g) admet un $D.L.$ d'ordre p (resp d'ordre q) alors f et g admettent un $D.L.$ d'ordre $n = \min(p, q)$. On supposera dans la suite que f et g admettent un $D.L.$ de même ordre.

4.4.3.1. Somme

Soient

$$f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

$$\text{et} \qquad g(x) = Q_n(x) + x^n \epsilon_1(x), \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon_1(x) = 0.$$

On a :
$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= P_n(x) + Q_n(x) + x^n(\epsilon(x) + \epsilon_1(x)) \\ &= P_n(x) + Q_n(x) + x^n \epsilon_2(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon_2(x) = 0. \end{aligned}$$

D'où : *si $f(x)$ et $g(x)$ admettent un $D.L.$ d'ordre n au voisinage de 0, $f(x) + g(x)$ admet un $D.L.$ d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est la somme des parties régulières des $D.L.$ de $f(x)$ et $g(x)$.*

Exemple :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon_1(x)$$

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon_2(x)$$

d'où

$$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2 + 2\left(\frac{x^2}{2!}\right) + \cdots + 2\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) + x^n \epsilon_3(x)$$

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^n \epsilon_4(x).$$

4.4.3.2. Produit

Si dans un polynôme $P(x)$ de degré $\leq n$ on supprime les termes de degré $> q$, on obtient un polynôme $Q(x)$ de degré $\leq q$: on dit que l'on a tronqué $P(x)$ à l'ordre q, et on écrit: $Q(x) = D_q\,(P(x))$.

Soient

$$f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

et

$$g(x) = Q_n(x) + x^n \epsilon_1(x), \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon_1(x) = 0.$$

On a :

$$f(x)g(x) = P_n(x)Q_n(x) + x^n\left(\epsilon(x)Q_n(x) + \epsilon_1(x)Q_n(x) + x^n \epsilon_1(x)\right).$$

Si on pose

$$C_n(x) = D_n\left(P_n(x)Q_n(x)\right)$$

on a :

$$f(x)g(x) = C_n(x) + x^n\epsilon_2(x). \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon_2(x) = 0.$$

D'où : *si $f(x)$ et $g(x)$ admettent un D.L. d'ordre n au voisinage de 0. alors $f(x)$ $g(x)$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0. dont la partie régulière est égale au produit des parties régulières de $f(x)$ et $g(x)$. tronquée à l'ordre n.*

Exemple : *Donner un D.L. de $f(x) = (x^3 + x^2 + 1)\ln(1 + x)$ à l'ordre 4*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon_1(x)$$

d'où

$$f(x) = D_4\left[(1 + x^2 + x^3)(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})\right] + x^4\epsilon_2(x)$$

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon_2(x).$$

4.4.3.3. Quotient

$$f(x) = P_n(x) + x^n\epsilon(x);$$
$$g(x) = Q_n(x) + x^n\epsilon_1(x). \text{ avec } \lim_{x\to 0} g(x) = Q_n(0) \neq 0.$$

On peut diviser $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ à l'ordre n. suivant les puissances croissantes :

$$P_n(x) = Q_n(x)D_n(x) + x^{n+1}R(x) \qquad \text{avec degré } D_n(x) \leq n.$$

D'où

$$f(x) = \left(g(x) - \epsilon_1(x)x^n\right)D_n(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\epsilon(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = g(x)D_n(x) + x^n\epsilon_2(x).$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = D_n(x) + x^n\epsilon_3(x).$$

Si $f(x)$ et $g(x)$ admettent un D.L. d'ordre n au voisinage de 0. et si $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0. dont la partie régulière s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n. la partie régulière du D.L. de f par la partie régulière du D.L. de g.

Exemples :

1)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x) \\
\operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\epsilon_1(x)
\end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{th} x = x + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + x^5\epsilon_2(x)$$

2)

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_1(x) \\
\operatorname{Log}(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x) \\
\frac{\sin x}{\operatorname{Log}(1+x)} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_1(x)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)} \\
&= \frac{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon_1(x)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\epsilon_2(x)} \\
&= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + x^2\epsilon(x).
\end{aligned}$$

4.4.3.4. Développement limité d'une fonction composée

On considère une fonction $u(x)$ admettant un *D.L.* au voisinage de 0 d'ordre n. avec $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$. et une fonction $f(u)$ admettant au voisinage de $u = 0$ un *D.L.* d'ordre n :

$$\begin{aligned}
u(x) &= B_n(x) + x^n\epsilon_1(x), \qquad B_n(0) = 0. \\
f(u) &= a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n + u^n\epsilon(u).
\end{aligned}$$

Posons : $F(x) = f(u(x))$: on a :

$$\begin{aligned}
F(x) = a_0 + a_1\left(B_n(x) + x^n\epsilon_1(x)\right) + \cdots + a_n\left(B_n(x) + x^n\epsilon_1(x)\right)^n \\
+ \left(B_n(x) + x^n\epsilon_1(x)\right)^n \epsilon(u(x)) \quad (1)
\end{aligned}$$

On montre par récurrence, en tenant compte de $B_n(0) = 0$. que :

$$\left(B_n(x) + x^n\epsilon_1(x)\right)^k = \left(B_n(x)\right)^k + x^n\epsilon_k(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon_k(x) = 0$$

le terme complémentaire de (1) devient

$$(B_n(x) + x^n\epsilon_1(x))^n \,\epsilon\,(u(x)) = (B_n(x))^n \,\epsilon\,(u(x)) + x^n\epsilon_n(x)\epsilon\,(u(x)) \tag{2}$$

comme $B(0) = 0$, alors $(B_n(x))^n = x^n Q(x)$ et

$$(B_n(x))^n \,\epsilon\,(u(x)) = x^n Q(x)\epsilon(u(x))$$

et comme $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon\,(u(x)) = 0$, on peut écrire :

$$(B_n(x) + x^n\epsilon_1(x))^n \,\epsilon\,(u(x)) = x^n\epsilon'(x). \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon'(x) = 0.$$

Finalement (1) s'écrit sous la forme :

$$F(x) = a_0 + a_1 B_n(x) + a_2\,(B_n(x))^2 + \cdots + a_n\,(B_n(x))^n + x^n\epsilon''(x) \tag{3}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon''(x) = 0$. D'où :

$$F(x) = P_n(x) + x^n\epsilon'''(x). \tag{4}$$

où $P_n(x) = D_n\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,(B_n(x))^k\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon'''(x) = 0$.

D'où la règle : La partie régulière du D.L. de $F(x)$ s'obtient en remplaçant u, dans la partie régulière du D.L. de $f(x)$, par la partie régulière du D.L. de $u(x)$, le tout tronqué à l'ordre n.

Exemple 1— *Développement limité d'ordre 3 de* $F(x) = \sqrt{1 + \ln(1+x)}$

Posons $u(x) = \ln(1+x)$

$f(u) = \sqrt{1+u}$

$u(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \epsilon_1(x)x^3 = B_3(x) + x^3\epsilon_1(x)$

$f(u) = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \dfrac{u^3}{16} + u^3\epsilon_1(u)$

d'où $F(x) = D_3\left(1 + \dfrac{B_3(x)}{2} - \dfrac{(B_3(x))^2}{8} + \dfrac{(B_3(x))^3}{16}\right) + x^3\epsilon(x)$

$$\boxed{F(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} + \frac{17x^3}{48} + x^3\epsilon(x)}$$

Exemple 2— *Développement limité à l'ordre 4 de* $G(x) = \operatorname{Log}\cos x$.

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\epsilon_1(x) = 1 + u(x).$

avec $u(x) = -\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\epsilon_1(x)$

d'où $G(x) = \operatorname{Log}(1 + u(x))$: $\quad \lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0.$

En appliquant la règle du D.L. d'une fonction composée à $G(x) = g(u(x))$ *avec* $g(u) = \ln(1+u)$, *on obtient :*

$$\boxed{\operatorname{Log}\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4\epsilon_3(x)}$$

4.4.4. Développements limités aux voisinages de $x_0 \neq 0$, et de l'infini

4.4.4.1. Définition

Une fonction $f(x)$ admet un $D.L.$ d'ordre n au voisinage de x_0, si la fonction $F(x) = f(x - x_0)$ admet un $D.L.$ d'ordre n au voisinage de 0.

Remarque: si $f(x)$ admet un $D.L.$ d'ordre n, on a :

$$F(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \epsilon_1(x)x^n, \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon_1(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon_1(x - x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_0}\epsilon_1(x - x_0) = 0 \end{array}}$$

D'où : f admet un $D.L.$ d'ordre n au voisinage de x_0 si et seulement si

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon_1(x - x_0),$$
$$\text{avec } \lim_{x\to x_0}\epsilon_1(x - x_0) = 0.$$

Exemple : *Donner le D.L. à l'ordre 3 de* $f(x) = e^x$ *au voisinage de* $x_0 = 1$.

$$F(x) = f(1 + x) = e^{1+x}.$$

$$e^{1+x} = e\,e^x = e\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon_1(x)\right]$$

$$\text{d'où } e^x = e\left[1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + (x-1)^3\epsilon_1(x-1)\right].$$

4.4.4.2. Définition

Une fonction $f(x)$ admet un $D.L.$ d'ordre n au voisinage de l'infini, si la fonction $F(x) = f(\frac{1}{x})$ admet un $D.L.$ d'ordre n au voisinage de 0. S'il en est ainsi on a :

$$F(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + x^n\epsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$$

d'où

$$\boxed{f(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_n}{n} + \frac{1}{x^n}\epsilon(\frac{1}{x}). \qquad \text{avec } \lim_{x\to\infty} \epsilon(\frac{1}{x}) = 0}$$

Exemple: *D.L. de* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$ *d'ordre 2 au voisinage de l'infini.*

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x^2}{1+2x}$$

$$F(x) = (1-x^2)\left(1-2x+4x^2+x^2\epsilon(x)\right)$$

$$F(x) = 1-2x+3x^2+x^2\epsilon(x).$$

d'où $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\epsilon\left(\dfrac{1}{x}\right).$

4.4.5. Généralisation des développements limités

Soit $f(x)$ une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). On suppose que $f(x)$ n'admet pas de *D.L.* au voisinage de 0, mais qu'il existe $k > 0$ tel que $\Phi(x) = x^k f(x)$ admet un *D.L.* au voisinage de 0. Dans ce cas:

$$x^k f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon(x). \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0;$$

d'où

$$\boxed{f(x) = x^{-k}\left[a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n\epsilon(x)\right].}$$

L'expression ainsi obtenue de $f(x)$ au voisinage de 0 s'appelle *D.L. généralisé de $f(x)$ au voisinage de* 0.

Exemples: *1) D.L. généralisé de* $f(x) = \dfrac{1}{x-x^2}$ *au voisinage de* 0.

$f(x)$ n'admet pas de D.L. au voisinage de 0 ($\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ *) : par contre* $xf(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\epsilon(x)$, *où* $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$ *;*
d'où

$$f(x) = \frac{1}{x}\left[1 + x + x^2 + x^3 + x^3\epsilon(x)\right].$$

2) D.L. généralisé de $f(x) = \operatorname{cotg} x$ *au voisinage de* 0. *$f(x)$ n'admet pas de D.L. au voisinage de 0 (* $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$ *), par contre*

$$x \operatorname{cotg} x = \frac{x\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\epsilon_1(x)}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4\epsilon_2(x)}$$

$$\Rightarrow x\operatorname{cotg} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + x^4\epsilon_3(x). \text{où } \lim_{x\to 0} \epsilon 3(x) = 0 \ :$$

d'où

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^3\epsilon_3(x)$$

3) D.L. généralisé de $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ *au voisinage de l'infini : en posant* $X = \frac{1}{x}$, *on se ramène au voisinage de* 0.

$$F(X) = f(\frac{1}{X}) = \sqrt[3]{\frac{1}{X^2}(\frac{1}{X} - 1)} = \sqrt[3]{\frac{1}{X^3}(1-X)} = \frac{1}{X}(1-X)^{\frac{1}{3}}.$$

$XF(X)$ *admet un D.L. limité au voisinage de* 0. *A l'ordre 2 on obtient :*

$$XF(X) = 1 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{9}X^2 + X^2\epsilon(X)$$

$$F(X) = \frac{1}{X} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}X + X\epsilon(X)$$

$$f(x) = x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \frac{1}{x}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le graphe de f *admet une asymptote d'équation* $y = x - \dfrac{1}{3}$ *; de plus* $f(x) - y$ *est équivalent à* $-\dfrac{1}{9x}$ *au voisinage de l'infini. D'où :*

$$\begin{aligned} f(x) - y < 0 \qquad & \text{si } x \to +\infty, \\ f(x) - y > 0 \qquad & \text{si } x \to -\infty. \end{aligned}$$

Ces inégalités déterminent la position du graphe de f *par rapport à l'asymptote.*

4.4.6. Application des développements limités

4.4.6.1. Recherche des limites

Lorsque la règle de l'Hôpital ne donne pas de résultats immédiats, on utilise alors les *D.L.* pour trouver les limites éventuelles des formes indéterminées.

Exemple 1 : *Trouver* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$

On a vu dans 4.5.5. exemple 3 que $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} + x^3\epsilon_3(x)$

$$\text{d'où} \qquad \frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^3\epsilon_3(x)$$

$$\text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right) = 0.$$

Exemple 2 : *Trouver* $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\sin \pi x}}$ *(forme* 1^∞*).*

On se ramène au voisinage de 0 en posant $x = 1 + X$

$$\begin{aligned} f(1+X) = (1-X)^{\frac{1}{\sin \pi(1+X)}} &= (1-X)^{-\frac{1}{\sin \pi X}} \\ &= e^{-\frac{\ln(1-X)}{\sin \pi X}} \\ &= e^{-\frac{-X+X\epsilon_1(X)}{\pi X + X\epsilon_2(X)}} \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{X\to 0} f(1+X) = e^{\frac{1}{\pi}}$$

Exemple 3 : *Trouver* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$

D'après 4.4.3.4 exemple 2

$$\ln\cos ax = -\frac{a^2x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x)$$

$$\ln\cos bx = -\frac{b^2x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x)$$

d'où $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \frac{a^2}{b^2}$$

4.4.6.2. Étude locale d'une fonction

Le développement limité d'une fonction au voisinage d'un point permet une étude locale de la fonction et donne des renseignements sur la forme de la courbe représentative.

Soit le *D.L.* de f en x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\epsilon(x)$$

dans lequel $a_n(x-x_0)^n$ représente le premier terme non nul, après celui du premier degré. On a alors les renseignements suivants : 1) L'équation de la tangente en M_0 $(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = a_0 + a_1(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

2) Au voisinage de x_0, on a : $f(x) - y \sim a_n(x-x_0)^n$, c'est-à-dire :

$$\overline{HM} \sim a_n(x-x_0)^n.$$

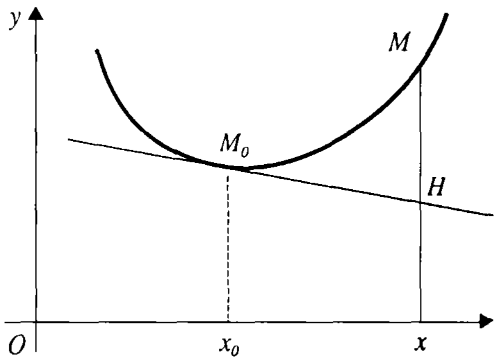


FIGURE: 4.4.6.2A

D'où :

a) Si n est paire, $\overline{HM}$ est du signe de a_n et la courbe reste localement du même côté de la tangente (M_0H) (Fig.4.4.6.2B).

b) Si n est impair, $\overline{HM}$ change de signe avec $x - x_0$ et la courbe traverse localement la tangente : M_0 est un point d'inflexion (Fig.4.4.6.2C).

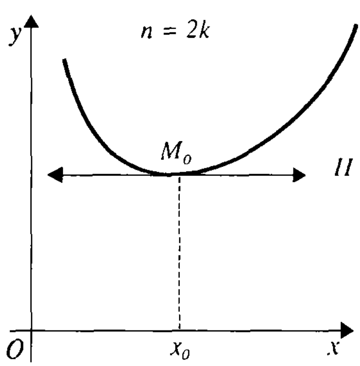


FIGURE: 4.4.6.2B

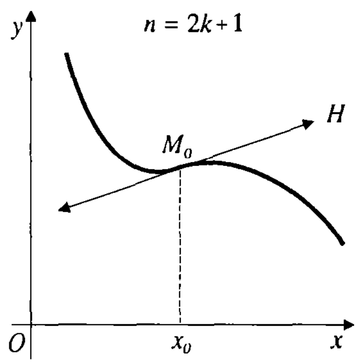


FIGURE: 4.4.6.2C

Plus n est grand et plus la courbe reste localement proche de sa tangente en M_0.

3) Si le développement limité généralisé de f au voisinage de l'infini est de la forme:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_n\frac{1}{x^n}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dans ce cas $y = a_0 + a_1x$ est l'équation de l'asymptote et le signe de $\frac{a_n}{x^n}$ donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote (4.4.5)

4.5. À RETENIR

1) Si $f, f' \dots f^{(n)}$ sont définies et continues sur $[a, b]$ et $f^{(n+1)}$ définie sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

2) f admet un $D.L.$ à l'ordre n au voisinage de 0, si pour tout point x d'un voisinage de 0 on a :

$$f(x) = P_n(f, x) + x^n \epsilon(x)$$

$P_n(f, x)$ est un polynôme en x de degré $\leq n$ et $\epsilon(x)$ un infiniment petit avec x.

— Propriétés : si f et g admettent un $D.L.$ à l'ordre n :

$$P_n(f+g, x) = P_n(f, x) + P_n(g, x)$$
$$P_n(fg, x) = D_n\left[P_n(f, x) \times P_n(g, x)\right]$$

Si $g(0) \neq 0$

$$P_n\left(\frac{f}{g}, x\right) = Q_n(x)$$

où $Q_n(x)$ est obtenue par division à l'ordre n de $P_n(f, x)$ par $P_n(g, x)$ suivant les puissances décroissantes.

Si $g(0) = 0$

$$P_n(f \circ g, x) = D_n\left[P_n\left(f, P_n(g, x)\right)\right].$$

3) Dans le $D.L.$ de f au voisinage de x_0 (ou de l'infini).

— les termes du premier degré donnent l'équation de la tangente (ou de l'asymptote).

— le signe du terme suivant précise la position de la courbe.

4.6. Exercices et problèmes

1) Montrer que :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} \qquad \text{si } x \geq 0.$$
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

2) Trouver le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de

$$f(x) = 1 - \cos x + \mathrm{Log}(\cos x).$$

Montrer que la fonction $g : x \to \dfrac{f(x)}{x^4}$ peut être prolongée par continuité en 0.

Quelle est la forme du graphe de g au voisinage de 0?

3) En utilisant un développement limité approprié, calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(\mathrm{tg}\, x - \sin x) - x^2}{x^5}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \mathrm{Log}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

4) Montrer que la fonction définie par $f(x) = x^3 \mathrm{Log}\, x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ admet un développement limité d'ordre 2 mais n'admet pas de développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0.

5) En utilisant la formule de Mac-Laurin, calculer $\sqrt{e}$ à 0,0001 près.

6) a) Déterminer a et b pour que

$y = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} + a + \frac{b}{x}$

soit un infiniment petit d'ordre le plus grand possible par rapport à l'infiniment petit principal $\frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$. Préciser alors l'ordre et la partie principale de y.

b) Donner un équivalent au voisinage de l'infini de

$f(x) = x\left(\sqrt{x^2 + \sqrt[4]{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}\right)$.

7) On considère la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par

$f(x) = \mathrm{Log}(1 + x)$

a) Soit $x \neq 0$; montrer en appliquant le théorème des accroissements finis à cette fonction sur l'intervalle $[0, x]$, qu'il existe un nombre réel

$\theta(x) = -1 + \dfrac{x}{\mathrm{Log}\,(1 + x)}$.

b) On considère la fonction $x \to \theta(x)$. Ecrire le développement limité de cette fonction à l'ordre 2 au voisinage de 0.

c) Montrer que θ peut être prolongée par continuité sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. On désigne encore par θ le prolongement obtenu. Calculer, s'ils existent les nombres $\theta'(0)$ et $\theta''(0)$.

8) a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable jusqu'à l'ordre n, $(n \geq 1)$.

Montrer que, si f s'annule en $(n + 1)$ points distincts de $[a, b]$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

b) Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, 1[$ et soit x fixé dans $]0, 1[$. Trouver un polynôme de degré 3 et une constante λ telle que la fonction h définie par

$$h(t) = g(t) - p(t) - \lambda t \left(t - \frac{x}{2}\right)(t - x)$$

vérifie : $h(0) = 0$, $h\left(\frac{x}{2}\right) = 0$; $h(x) = 0$, $h'\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.

c) En déduire qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$g(x) = g(0) + xg'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^3}{24}g'''(c).$$

9) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Montrer que f admet une application réciproque $g = f^{-1}$ et que g admet un développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 que l'on précisera.

10) a) En considérant les fonctions définies par :

$$f(x) = \text{Log}\,(1 + x^2) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \text{Log}\,(1 + x),$$

montrer que si deux fonctions sont équivalentes au voisinage d'un point, leurs logarithmes ne le sont pas nécessairement.

b) Montrer que si les *infiniments petits* y et z sont équivalents, les infiniments grands $\text{Log}\, y$ et $\text{Log}\, z$ le sont aussi.

c) Même question pour z et y infiniment grands.

11) a) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On suppose que $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur I.

b) On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a) = 0$. En utilisant la formule de Taylor, montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

c) Déduire de b) qu'il existe au plus une fonction vérifiant les hypothèses de a) telle que $f(0) = 1$.

d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie les hypothèses de a) et telle que $f(0) = 1$.

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x + y) = f(x)f(y)$.

e) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$U_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + x^2 2! + \cdots + x^n n!, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que U_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ et uniformément sur tout intervalle fermé borné $[-a, a]$.

(On montrera que $|U_m(x) - U_n(x)| \leq \dfrac{2a^{n+1}}{(n+1)!}$.)

2. On pose $U(x) = \lim_{n} U_n(x)$.

Montrer que la fonction $x \to U(x)$ est dérivable et vérifie les hypothèses de a) et $U(0) = 1$.

3. Donner une valeur approchée de $U(0)$ à 10^{-4} près.

Chapitre 5 : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

5.1. Rappels et généralités

5.1.1.

Soit $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in \mathbb{R}\}, i = 1, 2, \ldots, n\}$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace vectoriel de dimension n par les deux lois :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \quad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $i = 1, 2, \ldots, n$, soient

$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ et $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$

l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes, sauf la i-ème qui vaut 1, sont nulles.

La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée *base canonique*.

5.1.2.

$\mathbb{R}^n$ est muni naturellement d'une structure affine (voir Cours d'Algèbre), grâce à l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\to \overrightarrow{xy} = y - x \end{aligned}$$

Muni de cette structure, $\mathbb{R}^n$ sera noté $\mathscr{A}^n$ et ses éléments sont appelés des points. a étant un point de $\mathscr{A}^n$, l'application

$$\begin{aligned} \theta_a : \mathscr{A}^n &\to \mathbb{R}^n \\ m &\mapsto x = \overrightarrow{am} \end{aligned}$$

est une bijection. On dit alors que, par cette bijection, $\mathscr{A}^n$ est identifié, en prenant a comme origine, à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Un repère dans $\mathscr{A}^n$ d'origine a est un couple (a, B) où $a \in \mathscr{A}^n$ et B une base de $\mathbb{R}^n$. Les diverses propriétés énoncées dans les paragraphes qui suivent dans $\mathbb{R}^n$.

se traduisent aisément dans le langage de l'espace $\mathscr{A}^n$ grâce à la bijection θ_a. En particulier si a est le point $O = (0, \ldots, 0)$, alors on identifiera un point M de $\mathscr{A}^n$ avec le vecteur $x = \overrightarrow{OM}$. Les symboles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ne seront surmontés d'une flèche que lorsqu'il y aura risque de confusion.

5.1.3.

À l'instar de la valeur absolue d'un nombre réel, on introduit la notion de norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

5.1.3.1. Définition

Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application

$$N : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+$$

vérifiant les conditions suivantes :

1) $N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)

2) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)

3) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

Remarque : de 1), 2), 3) on tire :

$$|\, ||x|| - ||y||\, | \leq ||x - y||$$

5.1.3.2. Exemples de norme sur $\mathbb{R}^n$

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad N_2(x) = \sup(|x_i|) \qquad \text{et} \qquad N_e(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{1/2}$$

sont trois normes sur $\mathbb{R}^n$. N_1, N_2, N_e vérifient les inégalités suivantes : $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{n} N_1(x) \leq N_2(x) \leq N_1(x)$$

$$N_2(x) \leq Ne(x) \leq \sqrt{n} N_2(x) \qquad (1)$$

D'une manière générale, on dira que deux normes N et N' sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes s'il existe deux réels a et b strictement positifs tels que :

$$aN'(x) \leq N(x) \leq bN'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \qquad (2)$$

Il résulte de (1) que les trois N_1, N_2 et N_e sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. L'inégalité (2) permettra de constater aisément que les définitions et les propriétés vérifiées par une fonction, dans les paragraphes qui suivent, et énoncées à partir d'une norme N de $\mathbb{R}^n$, seront encore vérifiées, si on remplace dans l'énoncé N par une norme équivalente.

Dans la suite une norme N sur $\mathbb{R}^n$ sera notée $|| \ ||$. On dira que $\mathbb{R}^n$, muni d'une norme, est un espace vectoriel normé ; dans ce cas il sera noté $(\mathbb{R}^n, || \ ||)$.

5.1.4. Boules, ouverts, voisinages

5.1.4.1. Définition

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (resp. $m_0 \in \mathscr{A}^n$), la boule ouverte de centre x_0 (resp. m_0) et de rayon $\rho > 0$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathscr{A}^n$), notée $B(x_0, \rho)$ (resp. $\mathscr{B}(m_0, \rho)$), défini par :

$$B(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ ||x - x_0|| < \rho\},$$
$$\mathscr{B}(m_0, \rho) = \{m \in \mathscr{A}^n,\ ||\overrightarrow{m_0 m}|| < \rho\}.$$

$\mathscr{B}(m_0, \rho)$ est indépendant de l'origine choisie dans $\mathscr{A}^n$. Les ensembles

$$B_F(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ ||x - x_0|| \leq \rho$$
$$\text{et}\quad \mathscr{B}_F(m_0, \rho) = \{m \in \mathscr{A},\ ||x - x_0|| \leq \rho\}$$

sont respectivement appelés *boule fermée* de centre x_0 et de rayon ρ et boule fermée de centre m_0 et de rayon r.

On dira qu'un sous-ensemble Ω (resp. O de $\mathscr{A}^n$) de $\mathbb{R}^n$ est *ouvert* si et seulement si :

$$\forall x \in \Omega,\ \exists \rho > 0,\quad \text{tel que } \mathscr{B}(x, \rho) \subseteq \Omega$$
$$(\text{resp. } \forall m \in O,\ \exists \rho > 0,\quad \text{tel que } \mathscr{B}(m, \rho) \subset O).$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (resp. $m_0 \in \mathscr{A}^n$). Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathscr{A}^n$) contenant x_0 (resp. m_0) est appelé *voisinage* de x_0 (resp. m_0), s'il contient une boule ouverte de centre x_0 (resp. m_0).

Remarque : Un ouvert non vide est un voisinage de chacun de ses points.

5.1.5. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

5.1.5.1. Définition

Un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'une application :

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$$

vérifiant les propriétés suivantes.

1) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie)

2) $\varphi(x, y + z) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z)$ (linéarité)

3) $\lambda\varphi(x, y) = \varphi(\lambda x, y)$ (homogénéité)

4) $\varphi(x, x) > 0$ si $x \neq 0$ (positivité)

Notation : $\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle = x \cdot y$.

Une famille de vecteurs $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \dots, \overrightarrow{V_k})$ dans $\mathbb{R}^n$ est dite *orthogonale* par rapport à φ si $\varphi(\overrightarrow{V_i}, \overrightarrow{V_j}) = 0$, pour $i \neq j$.

Une base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ est dite *orthonormée* (par rapport à φ) si : $\varphi(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_j}) = 0$ si $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$ et $\varphi(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_i}) = 1$, $i = 1, \dots, n$.

On montre que pour un produit scalaire φ donné, il existe toujours des bases orthonormées. Par rapport à une base orthonormée $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$, l'expression de φ est :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

lorsque $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{u_i}$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{u_i}$.

5.1.5.2. Exemples

1) L'application $(x, y) \mapsto x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel la base canonique est orthonormée.

2) Pour $n = 2$, l'application

$$(x, y) \mapsto x \cdot y = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

5.1.5.3. Définition

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est dit euclidien s'il est muni d'un produit scalaire. Soit φ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. L'application

$$x \mapsto ||x|| = \sqrt{\varphi(x, x)}$$

définit une norme, dite *euclidienne*, sur $\mathbb{R}^n$.

5.1.5.4. Propriété

Si $||\ ||$ est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, alors on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ |x \cdot y| \leq ||x||\ ||y||,$$

le $\cdot$ indiquant le produit scalaire associé à $||\ ||$.

Preuve — Soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{u_i}$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{u_i}$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{et} \quad ||y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

$$
\begin{aligned}
\|x\|^2\|y\|^2 - (x \cdot y)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + \sum_{i<j}(x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 y_i^2 - 2\sum_{i<j} x_i y_i x_j y_j \\
&= \sum_{i<j}(x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i y_i x_j y_j) \\
&= \sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

D'où $\|x\|^2\|y\|2 \geq (x \cdot y)^2$ ou encore $\|x\| \, \|y\| \geq |x \cdot y|$.

5.2. Fonctions de plusieurs variables

On considère $\mathbb{R}^n$, muni de la norme, $\|x\| = \sup_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$

5.2.1. Définition

On appelle fonction de n variables toute application

$$
\begin{aligned}
&f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\
&x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

5.2.1.1. Exemples

1) $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; -1 \leq xy \leq 1\}$.

$$f = (x, y) \mapsto \text{Arcsin}(xy)$$

3) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

$$f = (x, y, z) \mapsto \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$$

D est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1

5.2.2. Limite et continuité

Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On dira que D est arbitrairement voisin de x_0 et on notera $D \sim x_0$, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in D$ tel que $||x - x_0|| < \varepsilon$.

5.2.2.1. Définition

Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $D \sim x_0$, et soit $l \in \mathbb{R}$. On dira que f admet pour limite l quand x tend x_0 et on écrira

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = l$$

si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tel que

$$(||x - x_0|| < \delta \text{ et } x \in D) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)$$

5.2.2.2. Définition

Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application. Soit $x_0 \in D$ tel que $D - \{x_0\} \sim x_0$. On dira que f est continue en x_0 si et seulement si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D - \{x_0\}}} f(x) = f(x_0)$$

5.2.2.3. Remarque

Les définitions de limite et de continuité pour les fonctions de plusieurs variables sont identiques à celles des fonctions d'une variable, la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ étant remplacée ici par la norme ; on aura donc les mêmes propriétés sur les limites et la continuité que pour les fonctions d'une variable.

5.3. Dérivées partielles

5.3.1. Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application, x_0 étant un point de Ω, soit $u \in \mathbb{R}^n$. On dira que f admet une *dérivée partielle* en x_0 relativement à u si

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(a + tu) - f(a)\right) \quad \text{existe.}$$

Si cette limite existe, on la notera $D_u f(a)$ ou $\mathrm{d}\,uf(a)$ et l'on dira que c'est la dérivée partielle de f en x_0 relativement à u.

5.3.2. Remarques

1) Comme $a \in \Omega$, il existe $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset \Omega$ et si $|t|$ est assez petit, $a + tu \in B(a, \rho)$; donc $f(a + tu)$ est bien défini pour t voisin de 0.

2) Posons $F(t) = f(a+tu)$. F est définie dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et on a $D_u f(a) = F'(0)$.

5.3.3. Définition

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. Soit $a \in \Omega$. On appelle *dérivée partielle* de f en a par rapport à la variable x_i, le nombre réel, s'il existe, $D_{e_i}f(a)$, où e_i est le i-ème élément de la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On notera :

$$D_{e_i}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{x_i}(a) = D_i f(a) = \mathrm{d}_{e_i} f(a) = \mathrm{d}_i f(a)$$

5.3.4. Remarques

1) D'après 5.3.1 et 5.3.2, si on pose $a = (a_1, \ldots, a_n)$ alors

$$D_{e_i}f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + t, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t}$$

Ainsi pour le calcul de $f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, il suffit de dériver f comme une fonction de la seule variable x_i, les autres variables jouant le rôle de paramètres.

Exemple

$$f(x, y) = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.$$

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y^2}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad f'_y(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

5.3.5. Dérivées partielles d'ordre supérieur

Si $D_i f(x)$ existe dans un ouvert V_a contenant a, on aura une fonction, notée $D_i f$, de V_a dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} D_i f : V_a &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto D_i f(x) \end{aligned}$$

Si $D_i f$ admet une dérivée partielle par rapport à x_j en a, on définit la *dérivée partielle d'ordre 2* $D_{ij} f(a)$ de f en a par :

$$D_{ij} f(a) = D_j \left(D_i f\right)(a) = \lim_{t\to 0} \frac{D_i f(a + t e_j) - D_i f(a)}{t}.$$

Notation :

$$\text{si } i \neq j, \ D_j(D_i f)(x) = D_{ij}(f)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) = f''_{x_i x_j}(x)$$

$$\text{si } i = j, \ D_i(D_i f)(x) = D_{i^2} f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) = f''_{x_i^2}(x).$$

De même si les $D_{ij} f(x)$ sont définies dans un ouvert contenant a et admettent des dérivées partielles par rapport aux variables x_k en a, on pourra définir les dérivées partielles d'ordre 3 de f en a.

En itérant ce processus, on définit la notion de dérivées partielles d'ordre p d'une fonction en un point : l'existence des dérivées partielles d'ordre p de f en a suppose celle des dérivées partielles d'ordre k de f dans un ouvert contenant a pour $1 \leq k < p$.

Le nombre de combinaisons p à p de n éléments étant égal à n^p, il y a *a priori* n^p dérivées partielles d'ordre p de f.

Exemple : $f(x, y) = \text{Arctg}\,\dfrac{y}{x}$. On a déjà calculé les dérivées partielles d'ordre 1 de f. Pour les dérivées partielles d'ordre 2 on a :

$$f''_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad f''_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = f''_{yx}.$$

5.3.6. Définition

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. On dira que :

f est de classe C^0 sur Ω si f est continue dans Ω.

f est de classe C^1 sur Ω si toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont définies et continues dans Ω.

f est de classe C^p sur Ω si toutes les dérivées partielles d'ordre p de f sont définies et continues dans Ω.

f est de classe C^∞ si pour tout $p \in \mathbb{N}$, les dérivées partielles d'ordre p sont définies et continues sur Ω.

5.4. Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de f en un point $a \in \Omega$ donne la configuration de f pour les points voisins de a appartenant aux droites $\{a + te_i, t \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Pour avoir des informations sur f dans un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, on introduit la notion de différentielle de f en a. On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On rappelle qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est différentiable en $t_0 \in I$ si et seulement si :

$$\exists L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \text{tel que : } \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0,\ \text{tel que,}$$
$$\text{si } |t - t_0| < \delta, \text{ alors } |f(t) - f(t_0) - L(t - t_0)| < \varepsilon |t - t_0|$$
$$L(1) = f'(t_0) \quad \text{et} \quad L(t) = t f'(t_0).$$

On calque la définition de la différentiabilité d'une fonction de plusieurs variables $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un point de Ω sur celle d'une fonction

d'une seule variable en considérant cette fois $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et en remplaçant la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ par la norme sur $\mathbb{R}^n$.

5.4.1. Définition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$, Ω un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. f est différentiable en x_0 si et seulement si :

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad \text{tel que} : \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ tel que} \\ \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)| \leq \varepsilon \|x - x_0\| \end{array}} \quad (1)$$

5.4.2. Proposition

Si f est différentiable en x_0, alors l'application linéaire L est unique.

Démonstration — L_1 et L_2 étant deux éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ qui vérifient la propriété (1) de la définition 5.3.1, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| \leq \delta(\varepsilon)$ entraîne :

$$\begin{aligned} &|f(x_0 + u) - f(x_0) - L_1(u)| \leq \varepsilon \|u\| \\ \text{et } &|f(x_0 + u) - f(x_0) - L_2(u)| \leq \varepsilon \|u\|. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|u\| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |L_1(u) - L_2(u)| &\leq |f(x_0 + u) - f(x_0) - L_1(u)| \\ &+ |f(x_0 + u) - f(x_0) - L_2(u)| \leq 2\varepsilon \|u\| \quad (2) \end{aligned}$$

Si L_1 était différent de L_2, il existerait $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \neq 0$, tel que $L_1(z_0) \neq L_2(z_0)$. On pose $z = \dfrac{\delta(\varepsilon)}{\|z_0\|} z_0$. On a $\|z\| = \delta(\varepsilon)$ et (2) entraîne

$$0 \leq |L_1(z) - L_2(z)| \leq 2\varepsilon \|z\|.$$

Compte tenu de la linéarité de L_1 et L_2 on en déduit que

$$0 \leq |L_1(z_0) - L_2(z_0)| \leq 2\varepsilon \|z_0\|.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $L_1(z_0) - L_2(z_0) = 0$, ce qui donne une contradiction. Par suite $L_1 = L_2$.

5.4.3. Définition

Si f est différentiable en x_0, l'application linéaire L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ donnée dans la définition 5.3.1 s'appelle la <u>différentielle de f en x_0</u>.

Notation : $L = Df(x_0) = \mathrm{d}f(x_0)$

5.4.4. Remarques

1) L'existence de la différentielle d'une fonction f en un point x_0 reflète la possibilité d'approcher f par l'application affine

$$x \to f(x_0) + \mathrm{d}\, f(x_0) \cdot (x - x_0) = (f(x_0) - \mathrm{d}\, f(x_0) \cdot x_0) + \mathrm{d}\, f(x_0) \cdot x.$$

L'inégalité (1) de la définition 5.3.1 mesure l'erreur de cette approximation quand x est voisin de x_0.

2) si $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, alors

$$|L(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} L(x_i e_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i L(e_i)\right| \leq (\sup |x_i|) \sum_{i=1}^{n} |L(e_i)|$$

$$\leq ||x||B. \quad \text{où } B = \sum_{i=1}^{n} |L(e_i)|$$

Par suite si f est différentiable en x_0, l'inégalité (1) de la définition 5.3.1 entraîne, en prenant $\varepsilon = 1$ et $||x - x_0|| < \delta(1)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |L(x - x_0)| + ||x - x_0|| \\ &\leq B||x - x_0|| + ||x - x_0|| \\ |f(x) - f(x_0)| &\leq (B + 1)||x - x_0|| \end{aligned} \tag{3}$$

En particulier si f est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0.

3) On montrera, comme pour les fonctions d'une variable, que si f et g sont différentiables en x_0, il en est de même pour $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) et fg et on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\alpha f + \beta g)(x_0) &= \alpha\, \mathrm{d}\, f(x_0) + \beta\, \mathrm{d}\, g(x_0) \\ \mathrm{d}(fg)(x_0) &= f(x_0)\, \mathrm{d}\, g(x_0) + \mathrm{d}\, f(x_0) g(x_0) \end{aligned}$$

5.4.5. Exemples

1) Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est constante ($f(x) = t_0$, $x \in \Omega$), alors f est différentiable en tout point de Ω et pour tout $x_0 \in \Omega$, $\mathrm{d}\, f(x_0)$ est l'application linéaire nulle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

2) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application linéaire, alors f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{d}\, f(x_0) = f$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Par suite, si g est une application affine ayant pour partie linéaire f, alors $\mathrm{d}\, g(x_0) = \mathrm{d}\, f(x_0) = f$ en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

5.5. Différentielles et dérivées partielles

On étudie ici la relation entre l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 d'une fonction f en un point et celle de la différentielle de f en ce point.

5.5.1. Théorème

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application. Si f est différentiable en $x_0 \in \Omega$, alors pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, la dérivée partielle $\mathrm{d}\,uf(x_0)$ existe et on a :

$$\mathrm{d}\,uf(x_0) = \mathrm{d}\,f(x_0) \cdot (u).$$

Démonstration — Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Si f est différentiable en x_0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$|f(x_0 + tu) - f(x_0) - \mathrm{d}\,f(x_0) \cdot tu| < \varepsilon||tu|| \quad \text{si } ||tu|| < \delta(\varepsilon) \qquad (1)$$

Si $u = 0$, alors $\mathrm{d}\,uf(x_0) = 0 = \mathrm{d}\,f(x_0) \cdot (u)$.

On suppose maintenant $u \neq 0$: dans ce cas si $0 < |t| \leq \dfrac{\delta(\varepsilon)}{||u||}$, alors de (4) on tire :

$$\left|\frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} - \mathrm{d}\,f(x_0) \cdot u\right| \leq \varepsilon||u||. \qquad (2)$$

(5) montre alors que $\mathrm{d}\,f(x_0) \cdot u = \mathrm{d}\,uf(x_0)$.

5.5.2. Corollaire

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. Si f est différentiable en $x_0 \in \Omega$, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$ existent et si $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}\,f(x_0).u &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0).u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0).u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0).u_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).u_i \end{aligned}}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,f(x_0).(u) &= \mathrm{d}\,f(x_0) \cdot (\sum_{i=1}^{n} u_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i \,\mathrm{d}\,f(x_0).(e_i). \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i \,\mathrm{d}\,e_i f(x_0). \text{ d'après 5.5.1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \end{aligned}$$

5.5.2.1. Différentielle et champ de gradients

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. Si f est différentiable en x_0, posons, pour $x \neq x_0$,

$$\varepsilon(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0) - \mathrm{d}\,f(x_0) \cdot (x - x_0)}{||x - x_0||}.$$

L'inégalité (1) de la définition 5.3.1 implique: $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x, x_0) = 0$ et on peut écrire

$$f(x) - f(x_0) = \mathrm{d}\,f(x_0) \cdot (x - x_0) + ||x - x_0||\varepsilon(x, x_0)$$
$$\text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x, x_0) = 0 \tag{1}$$

Comme $||x|| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \leq n||x||$, en posant

$$\varepsilon_1(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0) - \mathrm{d}\,f(x_0) \cdot (x - x_0)}{\sum\limits_{i=1}^{n} |x^i - x_0^i|}.$$

on voit encore que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x, x_0) = 0$ et

$$f(x) - f(x_0) = \mathrm{d}\,f(x_0) \cdot (x - x_0) + \sum_{i=1}^{n} |x^i - x_0^i| \varepsilon_1(x, x_0)$$
$$\text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x, x_0) = 0 \tag{2}$$

En considérant f comme une application de $\mathscr{A}^n$ dans $\mathbb{R}$, on appelle <u>*gradient* de f en M_0</u> et on note $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$ le vecteur d'origine M_0 et de coordonnées $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)$. Si f est différentiable en tout point de Ω, on obtient une application

$$\begin{aligned} \overrightarrow{grad} f : \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ M &\mapsto \overrightarrow{grad} f(M) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{grad} f$ s'appelle le champ de gradients associé à f. En posant $\vec{\varepsilon}(x, x_0) = \varepsilon_1(x, x_0)(1, 1, \ldots, 1)$, l'équation (2) s'écrit :

$$\boxed{f(M) - f(M_0) = \overrightarrow{M_0 M} \cdot (\overrightarrow{grad} f(M_0) + \vec{\varepsilon}(M, M_0))} \tag{3}$$

avec $\lim\limits_{M \to M_0} \vec{\varepsilon}(M, M_0) = \vec{0}$, le signe $\cdot$ désignant le produit scalaire, $x \cdot y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

5.5.3. Remarques

1) Les dérivées partielles d'ordre 1 peuvent exister en un point, sans que la fonction soit différentiable en ce point.

Exemple : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x = (0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$: en effet, de $\lim\limits_{x \to 0} f(x, \lambda x) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$, il résulte que f n'a pas de limite en $(0,0)$. Par suite f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Cependant les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et sont toutes les deux nulles.

2) Les projections $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ sont des applications différentiables (puisque linéaires) et la différentielle de p_i en chaque point coïncide avec p_i : si l'on note $\mathrm{d}\, x_i$ la différentielle de p_i, on a

$$\mathrm{d}\, x_i(u) = u_i.$$

Si f est une fonction différentiable en un point x_0, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, f(x_0)(u) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) u_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, \mathrm{d}\, x_i \right)(u) \end{aligned}$$

d'où $$\mathrm{d}\, f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, \mathrm{d}\, x_i.$$

3) $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension n. Pour $i = 1, 2, \dots, n$, $\mathrm{d}\, x_i \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\mathrm{d}\, x_i(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \\ 1 & \text{pour } i = j \end{cases}$$

on voit facilement que $(\mathrm{d}\, x_1, \mathrm{d}\, x_2, \dots, \mathrm{d}\, x_n)$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On a vu que l'existence des dérivées partielles en un point pour une fonction f ne suffit pas à assurer la différentiabilité de f en ce point. Toutefois si la fonction f est de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, alors f est différentiable en tout point de Ω. Plus précisément :

5.5.4. Théorème

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application. Soit $a \in \Omega$. Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, existent dans un voisinage de a et sont continues en a, alors f est différentiable en a

Démonstration — Soit $\varepsilon > 0$. On pose $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ et z_0 définis par : $z_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n)$, $z_2 = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ et $z_k = (a_1, \ldots, a_{n-k}, x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \ldots, x_n)$ avec $z_0 = a$ et $z_n = x$. $f(x) - f(a)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \{f(z_i) - f(z_{i-1})\} \tag{2}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ apparaissant comme la dérivée de f considérée comme fonction de la seule variable x_i, les autres variables jouant le rôle de paramètres, on peut appliquer le théorème des accroissements finis pour les fonctions d'une variable à la restriction de f au segment joignant z_{i-1} et z_i. Il existe alors un point y_{n-i+1} de ce segment tel que :

$$f(z_i) - f(z_{i-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-i+1}}(y_{n-i+1})(x_{n-i+1} - a_{n-i+1}).$$

D'où
$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i+1}}(y_{n-i+1})(x_{n-i+1} - a_{n-i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(yi)(x_i - a_i) \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \\ = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(y_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)(x_i - a_i). \end{aligned} \tag{3}$$

les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ étant continues en a, il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que, si $||x - a|| < \delta(\varepsilon)$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| < \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

D'après la définition des z_i, si $||x - a|| < \delta(\varepsilon)$, alors $||y_i - a|| < \delta(\varepsilon)$, et on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(y_i) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$. (3) donne :

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)\right| &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i \\ &\leq n\varepsilon||x - a|| \end{aligned}$$

Par suite f est différentiable en x_0 et $Df(x_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

5.5.5. Exemples

1) Soit f la fonction définie sur l'ouvert $\Omega = \{(x,y)/x^2+y>0\}$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$. Déterminons la différentielle de f au point $a=(1,1)$. $f'_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}}$ et $f'_y(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y}}$. f'_x et f'_y sont définies et continues dans Ω. Donc f est différentiable en tout point de Ω, et au point $a=(1,1)\in\Omega$ on a : $\mathrm{d}f(a) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2}\mathrm{d}y)$

2) De même la fonction $f(x,y) = \operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et en tout point (x,y) de Ω, on a :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

5.5.6. Remarque

Si f et g sont des fonctions différentiables en un point a d'un ouvert Ω, il en est de même de $f+g$, $\lambda f (\lambda\in\mathbb{R})$, fg et $\dfrac{f}{g}$ si $g(x)\neq 0$ sur Ω, et on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f+g)(a) &= \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a)\\
\mathrm{d}(fg)(a) &= f(a)\,\mathrm{d}g(a) + g(a)\,\mathrm{d}f(a)\\
\mathrm{d}(\lambda f)(a) &= \lambda\,\mathrm{d}f(a)\\
\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(a) &= \frac{g(a)\,\mathrm{d}f(a) - f(a)\,\mathrm{d}g(a)}{g^2}
\end{aligned}$$

5.6. Différentielle d'une fonction composée

5.6.1. Théorème

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f:\Omega\to\mathbb{R}$ une application, I un intervalle ouvert et $g: I\to\mathbb{R}$ une application telle que $g(I)\subset\Omega$.

$$t \mapsto (g_1(t),\dots,g_n(t))$$

Soit $t_0\in I$. Si les fonctions g_i, $i=1,\dots,n$, sont dérivables en t_0 et si f est différentiable au point $a=g(t_0)$, alors la fonction composée $F = f\circ g$ est dérivable en t_0 et on a :

$$\boxed{F'(t_0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)g'_i(t_0).} \qquad (1)$$

Démonstration — On pose $h(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et $H = h\circ g$.

On a $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(a) = 0$ pour $i=1,\dots,n$ et $\mathrm{d}h(a)\equiv 0$. Par suite, pour $\varepsilon>0$,

il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $||x - a|| < \delta$, alors :

$$|h(x) - h(a)| \leq \varepsilon ||x - a|| \tag{1}$$

Les g_i étant dérivables en t_0, il existe $\beta > 0$, et $k > 0$ tel que si $|t - t_0| < \beta$, on a : $|g_i(t) - g_i(t_0)| < k|t - t_0|$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Comme $||g(t) - g(t_0)|| = \sup |g_i(t) - g_i(t_0)|$, $i = 1, \dots, n$, si $|t - t_0| < \beta$, alors

$$||g(t) - g(t_0)|| \leq k|t - t_0|. \tag{2}$$

Soit $\gamma = \inf\left(\beta, \dfrac{\delta}{k}\right)$. Si $|t - t_0| < \gamma$, (1) et (2) impliquent :

$$|H(t) - H(t_0)| < \varepsilon k|t - t_0|,$$

donc H est dérivable en t_0 et $H'(t_0) = 0$. Or

$$F(t) = H(t) + \sum_{i=1}^{n} \left(g_i(t) - g_i(t_0)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a \right).$$

d'où

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} g_i'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

5.6.2. Remarques

1) Le symbole $*$ désigne le changement de variables : $*\{x_i = g_i(t) \quad i = 1, \dots, n\}$, on notera $*f$ la fonction $f \circ g$. On a alors :

$$*(f_1 + f_2) = *f_1 + *f_2, \qquad *(f_1 f_2) = (*f_1)(*f_2).$$

Si f est la fonction

$$\begin{aligned} x_i : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_i(x) = x_i \end{aligned}$$

où $x_i(x)$ est la i-ème composante de x, alors $*x_i = g_i$ et dans ce cas particulier la formule (1) de 5.6.1 s'écrit

$$\mathrm{d}*x_i = *\mathrm{d}x_i.$$

Dans le cas général, la formule (1) peut s'écrire :

$$\mathrm{d}F(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}g_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathrm{d}*f &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}*x_i * \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} * \left(\mathrm{d}x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \\ &= * \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{d} * f = * \mathrm{d} f} \tag{1}$$

2) Le calcul précédent se généralise aisément. Supposons par exemple pour le cas de 2 variables que le symbole $*$ indique le changement de variable

$$\begin{cases} x = g(u, v, w) \\ y = h(u, v, w) \end{cases}$$

$*f$ désigne alors la fonction

$$*f = F : (u, v, w) \mapsto f\left(g(u, v, w), h(u, v, w)\right).$$

Si $f(x, y)$ est différentiable, et si g et h admettent des dérivées partielles d'ordre 1, on a : (Théorème 5.6.1)

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial(*f)}{\partial u} = *f'_x \frac{\partial g}{\partial u} + *f'_y \frac{\partial h}{\partial u} \tag{2}$$

et des formules analogues pour w et v. En posant

$$* \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial * x}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u}$$
$$* \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial * y}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u}$$

la formule (2) s'écrit :

$$\frac{\partial * f}{\partial u} = * \left(f'_x \frac{\partial x}{\partial u} + f'_y \frac{\partial y}{\partial u} \right)$$

3) Si en outre g et h sont différentiables la relation (1) de 1) entraîne :

$$* \mathrm{d} x = \mathrm{d} * x = \mathrm{d} g = g'_t \,\mathrm{d} u + g'_v \,\mathrm{d} v + g'_w \,\mathrm{d} w$$
$$* \mathrm{d} y = \mathrm{d} * y = \mathrm{d} h = h'_t \,\mathrm{d} u + h'_v \,\mathrm{d} v + h'_u \,\mathrm{d} w$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \mathrm{d} F &= \mathrm{d} * f = F'_t \,\mathrm{d} u + F'_v \,\mathrm{d} v + F'_u \,\mathrm{d} w \\ * \mathrm{d} f &= * \left(f'_x \,\mathrm{d} x + f'_y \,\mathrm{d} y \right) = f'_x * \mathrm{d} x + f'_y * \mathrm{d} y \\ &= * f'_x \left(g'_t \,\mathrm{d} u + g'_v \,\mathrm{d} v + g'_u \,\mathrm{d} w \right) + * f'_y \left(h'_t \,\mathrm{d} u + h'_v \,\mathrm{d} v + h'_u \,\mathrm{d} w \right) \\ &= \left(* f'_x g'_t + * f'_y h'_t \right) \mathrm{d} u + \left(* f'_x g'_v + * f'_y h'_v \right) \mathrm{d} v + \left(* f'_x g'_u + * f'_y h'_u \right) \mathrm{d} w \\ &= F'_t \,\mathrm{d} u + F'_v \,\mathrm{d} v + F'_u \,\mathrm{d} w \end{aligned}$$

d'après (2). D'où la formule :

$$\boxed{\mathrm{d} * f = * \mathrm{d} f.} \tag{3}$$

La formule (3) généralise (1) de 1) et condense sous une forme concise une bonne partie du cours d'analyse.

La formule (3) s'interprète en disant que l'opérateur $*$ (changement de variables) est « transparent » pour l'opérateur d (différentiation).

Exemple — Soit $*$ le changement de variables $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\cos\theta$, faisant passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. En appliquant (3) on a :

$$*F(x,y) = \Phi(\varrho,\theta)$$

$$\Phi'_\varrho \,\mathrm{d}\varrho + \Phi'_\theta \,\mathrm{d}\theta = *f'_x(\mathrm{d}\varrho\cos\theta - \varrho\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) + *f'_y(\mathrm{d}\varrho\sin\theta - \varrho\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)$$

d'où :

$$\begin{aligned}\Phi'_\varrho &= (*f'_x)\cos\theta + (*f'_y)\sin\theta\\ \Phi'_\theta &= (*f'_x)(-\varrho\sin\theta) + (*f'_y)(\varrho\cos\theta)\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}\varrho\Phi'_\varrho &= *(xf'_x + yf'_y)\\ \Phi'_\theta &= *(xf'_y - yf'_x)\end{aligned}$$

5.7. Formule des accroissements finis Théorème de Schwartz Formule de Taylor

5.7.1. Théorème des accroissements finis

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur Ω. Pour tout couple d'éléments a, b de Ω, tels que le segment $[a,b]$ est contenu dans Ω, il existe θ, $0 < \theta < 1$ tel que :

$$\boxed{f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta b + (1-\theta)a)(b^i - a^i)} \qquad (1)$$

Corollaire — Soit f une application différentiable sur un ouvert convexe Ω de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathrm{d}f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors f est constante sur Ω.

Démonstration du théorème — Posons $F(t) = f(\varphi(t))$ où $\varphi : [0,1] \to \Omega$ est définie par $\varphi(t) = (1-t)a + tb$. F est continue sur $[0,1]$ et d'après 5.6.1, F est dérivable sur $]0,1[$ avec

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))\,\varphi'_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left((1-t)a + tb\right)(b_i - a_i)$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à F sur $[0,1]$, il existe θ, $0 < \theta < 1$, tel que $F(1) - F(0) = F'(\theta)(1-0)$: d'où le résultat.

5.7.2. Remarques

1) dans $\mathscr{A}^n$ la formule (1) s'écrit sous la forme :

$$f(M_1) - f(M_0) = \overrightarrow{grad} f(M) \cdot \overrightarrow{M_0 M_1},$$

où M est un point du segment ouvert $]M_0, M1[$.

2) Si f est une application différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et si les dérivées partielles sont bornées sur Ω , alors il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout couple de points a, b de Ω , $[a, b] \subset \Omega$, on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq k\|b - a\|. \tag{2}$$

En effet soit $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in \Omega$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq \lambda$, $i = 1, \ldots, n$. La formule (1) donne :

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leq \lambda \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| \\ &\leq k\|b - a\|, \text{ avec } k = \lambda n \end{aligned}$$

5.7.3. Théorème de Schwartz. Formule de Taylor

5.7.3.1. Théorème de Schwartz

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application définie sur un Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si deux dérivées partielles d'ordre p de f sont définies dans un voisinage d'un point $a \in \Omega$, et continues en a, et si elles ne diffèrent que par l'ordre des dérivations, alors elles sont égales au point a.

Démonstration — Compte tenu de la définition des dérivées partielles d'ordre p, à partir des dérivées partielles d'ordre $p - 1$, il suffit de démontrer le théorème pour $p = 2$.

Soit

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x, y &\to f(x, y) \end{aligned}$$

telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ sont définies dans un voisinage du point (a, b) et continues en ce point.

Posons $\lambda = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a, b)$.

et $g(x, y) = f(x, y) - \lambda xy$

$h(x) = g(x, b + v) - g(x, b)$.

$$\begin{aligned} A(u, v) &= h(a + u) - h(a) \\ &= f(a + u, b + v) - f(a, b + v) - f(a + u, b) + f(a, b) - \lambda uv \end{aligned}$$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}$ est continue en (a, b) et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(a, b) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$: il existe $\alpha > 0$ tel que si $\|(x, y) - (a, b)\| < \alpha$, alors

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x, y)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x, y)\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Soit (x, y) tel que $\|(x, y) - (a, b)\| < \dfrac{\alpha}{2}$ et (u, v) tel que $\|(u, v)\| < \dfrac{\alpha}{2}$. On a alors $\|(x, b + v) - (a, b)\| < \alpha$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction

$$z \to \frac{\partial g}{\partial x}(x, z)$$

sur l'intervalle $[x, b + v]$, on déduit de (1) :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, b + v) - \frac{\partial g}{\partial x}(x, b)\right| < \varepsilon|v|,$$

c'est-à-dire

$$|h'(x)| < \varepsilon|v|. \tag{2}$$

En appliquant de nouveau le théorème des accroissements finis à la fonction h sur l'intervalle $[a, a + u]$, il résulte de (2) :

$$|A(u, v)| = |h(a + u) - h(a)| < \varepsilon|v|\,|u|.$$

D'où $\left|\dfrac{A(u, v)}{uv}\right| < \varepsilon$. On a donc montré que $\displaystyle\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{A(u, v)}{uv} = 0$.

Maintenant posons $\mu = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a, b)$ et

$$B(u, v) = f(a + u, b + v) - f(a + u, b) - f(a, b + v) + f(a, b) - \mu uv.$$

On montre de même que : $\displaystyle\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{B(u, v)}{uv} = 0$. Et ainsi on a :

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{A(u, v) - B(u, v)}{uv} = \lambda - \mu = 0$$

donc $\lambda = \mu$.

5.7.3.2. Formule de Taylor

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable de classe C^r sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; soient a et b deux éléments de Ω tels que le segment $[a, b]$ soit contenu dans Ω. On pose $b = a + u$; considérons la fonction

$$\begin{aligned} F : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ t &\to F(t) = f(a + tu) \end{aligned}$$

D'après le théorème 5.6.1, $F(t)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre p continues. La formule de Mac-Laurin d'ordre p donne pour $t = 0$ et $t = 1$.

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(\theta), \text{ avec } 0 < \theta < 1. \tag{1}$$

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+tu)u_i$$

$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a+tu)u_i u_j.$$

$F''(t)$ peut s'écrire symboliquement sous la forme : $\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+tu)u_i\right]^{(2)}$.

En posant $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ et $\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_j}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i}$,
par un raisonnement par récurrence on montre qu'on peut écrire :

$$F^{(p)}(t) = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+tu)u_i\right]^{(p)}.$$

En posant

$$\frac{\partial f^{(r_1)}}{\partial x_{i_1}} \times \frac{\partial f^{(r_2)}}{\partial x_{i_2}} \times \cdots \frac{\partial f^{(r_p)}}{\partial x_{i_p}} = \frac{\partial^{(r_1+r_2+\ \ +r_p)} f}{\partial x_{i_1}^{n_1} \cdots \partial x_{i_p}^{n_p}}.$$

la formule (1) s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i) + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i)\right]^{(2)} + \cdots \\ &\cdots + \frac{1}{(p-1)!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i)\right]^{(p-1)} + \frac{1}{p!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i)\right]^{(p)} \end{aligned}} \tag{2}$$

où c est un point du segment ouvert $]a, b[$.

Remarques

1) Pour $n = 2$ et $p = 2$, la formule (2) s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left[h^2 f''_{x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta h) + 2hkf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)\right. \\ &\left. + k^2 f''_{y^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)\right] \end{aligned} \tag{3}$$

2) En utilisant la continuité des dérivées partielles d'ordre 2, (3) peut s'écrire, en posant $M = (x_0 + h, y_0 + k)$ et $M_0 = (x_0, y_0)$:

$$f(M) = f(M_0) + (hf'_x + kf'_y)(M_0) + \frac{1}{2}(h^2 f''_{x^2} + 2hkf''_{xy} + k^2 f''_{y^2})(M_0)$$
$$+ (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k), \quad \text{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0 \quad (4)$$

(4) donne le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $M_0 = (x_0, y_0)$.

5.7.3.3. Application à la recherche des extrémums

Soit f une fonction définit sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Par définition f admet un maximum local en $M_0(x_0, y_0)$, si $f(M) \leq f(M_0)$ pour tout point M appartenant à un voisinage de M_0. Si $f(M) \geq f(M_0)$, f admet un minimum local.

Proposition — Si f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en $M_0(x_0, y_0)$ et si M_0 est un extremum local alors

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Preuve — En effet posons $h_1(x) = f(x, y_0)$ et $h_2(y) = f(x_0, y)$. h_1 et h_2 admettent un extrémum respectivement en x_0 et y_0. Donc :

$$h'_1(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad h'_2(y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Remarque — Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. D'après la proposition précédente, si f admet un extremum en $M_0 \in \Omega$, alors $f'_x(M_0)$ et $f'_y(M_0)$ sont nulles. Mais cette condition n'est pas suffisante pour affirmer que f admet un extremum en M_0. Par exemple si f est la fonction $(x, y) \to x^3 + y^3$, alors $f'_x(0, 0) = 0$ et $f'_y(0, 0) = 0$, mais $(0, 0)$ ne correspond pas à un extremum local, car dans n'importe quel voisinage de $(0, 0)$, il existe des points vérifiant $f(x, y) < f(0, 0)$ et d'autres points tels que $f(x, y) > f(0, 0)$.

Si $f'_x(M_0)$ et $f'_y(M_0)$ sont nulles, pour vérifier que f admet un extremum en M_0, on utilise souvent la formule de Taylor :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(M_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\right) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$
$$\text{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0.$$

Pour $M(x_0+h, y_0+k)$ assez voisin de M_0, $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ a le même signe que $\rho(h, k) = ph^2 + 2rhk + qk^2$, où $p = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)$, $q = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)$ et $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(M_0)$, lorsque ces dérivées partielles ne sont pas toutes nulles

$\rho(h,k)$ est un polynôme de degré 2 en h. Il gardera un signe constant si $r^2 - pq < 0$; dans ce cas, on a :

- $f(M) - f(M_0) > 0$ si $p > 0$ et f admet un minimum local en M_0.
- $f(M) - f(M_0) < 0$ si $p < 0$ et f admet un maximum local en M_0.

Si $r^2 - pq > 0$, $\rho(h,k)$ ne garde pas un signe constant : f n'admet pas d'extremum en a.

Exemple — Trouver les extremums de la fonction $f(x,y) = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$.

$f'_x = 2(1-x)$; $f'_y = 4(2-y)$.

$f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0 \iff M_0 = (1,2)$.

$f''_{x^2}(M_0) = -2$ et $\left[f''_{x^2}f''_{y^2} - (f''_{xy})^2\right](M_0) = (-2)(-4) = 8 > 0$, d'où M_0 est un maximum pour f.

5.8. Fonctions implicites Formes différentielles

5.8.1. Théorème (des fonctions implicites)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur Ω.

Soit l'équation $f(x,y) = 0$ (1). On suppose que :

1) il existe $(a,b) \in \Omega$ tel que $f(a,b) = 0$,

2) $f'_y(a,b) \neq 0$.

Alors il existe un intervalle $[a_1, a_2]$ centré en a et une fonction continue

$$\begin{aligned} \varphi : [a_1, a_2] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

telle que : $f(x,\varphi(x)) = 0\ \forall x \in [a_1, a_2]$ et $b = f(a)$. En outre φ est dérivable sur $]a_1, a_2[$ et on a :

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x\,(x,\varphi(x))}{f'_y\,(x,\varphi(x))}, \quad \forall x \in]a_1, a_2[.$$

φ est dite fonction implicite définie par l'équation (1).

Preuve

1) Supposons par exemple $f'_y(a,b) > 0$. Comme f'_y est continue, il existe un voisinage $W(a,b) = [a'_1, a'_2] \times [b_1, b_2]$ de (a,b) tel que $f'_y(x,y) > 0$

pour tout $(x, y) \in W(a, b)$. La fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{f'_x}{f'_y}(x, y)$ est bien définie et continue sur $W(a, b)$, f'_x et f'_y étant continues dans cet ensemble.

Si $W(a, b)$ est assez petit, alors il existe un réel $k > 0$ tel que :

$$\left|\frac{f'_x}{f'_y}(x, y)\right| \leq k, \quad \forall (x, y) \in W(a, b). \tag{1}$$

2) D'après le théorème des accroissements finis on a :

$$\begin{aligned} f(a, b_2) &= f(a, b) + (b_2 - b) f'_y(a, c_2), \text{ où } c_2 \in]b, b_2[\\ &= (b_2 - b) f'_y(a, c_2) \end{aligned}$$

Comme $f'_y(a, c_2) > 0$, alors $f(a, b_2) > 0$. De même

$$\begin{aligned} f(a, b_1) &= f(a, b) + (b_1 - b) f'_y(a, c_1) \\ &= (b_1 - b) f'_y(a, c_1), \text{ avec } c_1 \in]b_1, b[\end{aligned}$$

d'où $f(a, b_1) < 0$. Comme les fonctions $x \mapsto f(x, b_1)$ et $x \mapsto f(x, b_2)$ sont continues, il existe un intervalle centré en a, $[a_1, a_2] \subset [a'_1, a'_2]$, tel que $f(x, b_2) > 0$ et $f(x, b_1) < 0$ pour tout $x \in [a_1, a_2]$.

En posant $V(a, b) = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, l'inégalité (1) de 1) est encore vérifiée sur $V(a, b)$.

3) Pour tout $x \in [a_1, a_2]$, considérons la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_x : [b_1, b_2] &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \varphi_x(y) = f(x, y) \end{aligned}$$

φ_x est continue et dérivable sur $[b_1, b_2]$ et on a $\varphi'_x(y) = f'_y(x, y)$.

Les inégalités $\varphi_x(b_1) < 0$ et $\varphi_x(b_2) > 0$ entraînent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'existence d'un point $y_x \in [b_1, b_2]$ tel que $\varphi_x(y_x) = 0$.

Puisque $\varphi'_x(y) > 0$, $y \in [b_1, b_2]$, φ est strictement croissante sur l'intervalle $[b_1, b_2]$. Donc y_x est l'unique point de cet intervalle vérifiant $\varphi_x(y_x) = 0$.

Ainsi la correspondance $x \mapsto y_x$ définit bien une application sur l'intervalle $[a_1, a_2]$. Notant φ cette application, on a : $\varphi(a) = b$, $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

4) φ est continue sur $[a_1, a_2]$. En effet soit $x_0 \in [a_1, a_2]$, x_0 fixé. $V(a, b)$ étant convexe, pour tout $x \in [a_1, a_2]$, il existe d'après le théorème des accroissements finis, un point C_x appartenant au segment ouvert reliant $(x_0, \varphi(x_0))$ et $(x, \varphi(x))$ tel que :

$$0 = f(x, \varphi(x)) - f(x_0, \varphi(x_0)) = (x - x_0) f'_x(C_x) + (\varphi(x) - \varphi(x_0)) f'_y(C_x)$$

D'où

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |x - x_0| \left| \frac{f'_x(C_x)}{f'_y(C_x)} \right| \leq k|x - x_0| \quad \text{d'après (1)}$$

Par suite si x tend x_0, $\varphi(x)$ tend vers $\varphi(x_0)$: et φ est continue en x_0.

5) φ est dérivable sur $]a_1, a_2[$. Soit $x \in [a_1, a_2]$, x fixé. Soit h assez petit de sorte que $x + h \in]a_1, a_2[$. D'après la continuité de φ on a :

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + \varepsilon(h), \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

D'autre part d'après la formule des accroissements finis, il existe θ, $0 < \theta < 1$, tel que:

$$\begin{aligned} 0 &= f\,(x + h, \varphi(x + h)) - f\,(x, \varphi(x)) \\ &= hf'_x\,(x + \theta h, \varphi(x) + \theta\varepsilon(h)) + (\varphi(x + h) - \varphi(x))\, f'_y\,(x + \theta h, \varphi(x) + \theta\varepsilon(h)) \end{aligned}$$

D'où $\dfrac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} = -\dfrac{f'_x\,(x + \theta h, \varphi(x) + \theta\varepsilon(h))}{f'_y\,(x + \theta h, \varphi(x) + \theta\varepsilon(h))}$: quand $h \to 0$, le second membre tend vers $-\dfrac{f'_x\,(x, \varphi(x))}{f'_y\,(x, \varphi(x))}$, les fonctions f'_x et f'_y étant continues et $f'_y\,(x, \varphi(x)) > 0$. Par suite φ est dérivable en x et on a :

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x\,(x, \varphi(x))}{f'_y\,(x, \varphi(x))}.$$

5.8.2. Remarques

1) On peut généraliser le résultat précédent aux fonctions de n variables, $n \geq 2$, (avec une démonstration analogue). Par exemple si $f(x, y, z)$ est une fonction de classe C^1 vérifiant $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ et $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, il existe un voisinage ouvert V de (x_0, y_0) et une application

$$\begin{aligned} \varphi : V &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) \end{aligned}$$

telle que : $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ et $f\,(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ $\forall (x, y) \in V$. φ est différentiable sur V et on a :

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, y) &= -\frac{f'_x\,(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z\,(x, y, \varphi(x, y))} \\ \varphi'_y(x, y) &= -\frac{f'_y\,(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z\,(x, y, \varphi(x, y))} \end{aligned} \qquad (1)$$

2) Si on sait que φ est différentiable, on peut trouver les relations (1) aisément. En effet soit le changement des variables

$$* \begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= \varphi(x, y) \end{cases}$$

on a : $*f = f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ sur V.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}*f &= *\mathrm{d}f \\ &= *(f'_x \,\mathrm{d}x + f'_y \,\mathrm{d}y + f'_z \,\mathrm{d}z) \\ &= *f'_x \,\mathrm{d}*x + *f'_y \,\mathrm{d}*y + *f'_z \,\mathrm{d}*z \\ &= (*f'_x + *f'_z\varphi'_x)\,\mathrm{d}x + (*f'_y + *f'_z\varphi'_y)\,\mathrm{d}y = 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} *f'_x + *f'_z\varphi'_x &= 0 \\ *f'_y + *f'_z\varphi'_y &= 0 \end{aligned}$$

3) L'équation $f(x, y) = 0$ définit implicitement une courbe $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^2$. En un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, $y = \varphi(x)$ est une représentation cartésienne de $\mathscr{C}$ au voisinage de x_0. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point (x_0, y_0) est

$$y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

4) Soit f une fonction numérique de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. L'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient l'équation $f(x, y, z) = 0$ est une surface (S) de $\mathbb{R}^3$.

Trois fonctions $x = x(t)$, $y = y(t)$ et $z = z(t)$ dérivables sur un intervalle I, représentent paramétriquement une courbe Γ de (S) si :

$$F(t) = f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

La relation $*\mathrm{d}f = \mathrm{d}*f = 0$, où $* \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ montre que le vecteur $\vec{N} = (f'_x(x(t), y(t), z(t)), f'_y(x(t), y(t), z(t)), f'_z(x(t), y(t), z(t)))$ est normal à Γ en $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Ainsi les courbes de (S) passant par un point M_0 ont leurs tangentes en ce point situées dans un plan P_0 passant par M_0 et perpendiculaire à $\vec{N_0} = (f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0))$ appelé <u>*plan tangent* à (S) en M_0</u>. $\vec{N_0}$ est le <u>vecteur normal à (S)</u> en $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Le plan P_0 a pour équation :

$$\boxed{(x - x_0)f'_x(M_0) + (y - y_0)f'_y(M_0) + (z - z_0)f'_z(M_0) = 0}$$

Si l'équation de (S) est donnée sous la forme :
$z = \varphi(x, y)$ ou $z - \varphi(x, y) = 0$, alors

$$\vec{N_0} = (-\varphi'_x(x_0, y_0), -\varphi'_y(x_0, y_0), 1) \tag{1}$$

et P_0 a pour équation : $z - z_0 = \varphi'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

5.8.3. Formes différentielles

On traitera ici pour la simplicité des notations les fonctions de deux variables. Les définitions et résultats pourront être aisément étendus aux fonctions de plusieurs variables. Si $f :\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable sur Ω, alors :

$$\mathrm{d}\, f = f'_x(x, y)\,\mathrm{d}\, x + f'_y(x, y)\,\mathrm{d}\, y.$$

Par extension on a :

5.8.3.1. Définition

On appelle forme différentielle de degré 1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ toute combinaison linéaire

$$\omega(x, y) = P(x, y)\,\mathrm{d}\, x + Q(x, y)\,\mathrm{d}\, y$$

des différentielles $\mathrm{d}\, x$ et $\mathrm{d}\, y$, P et Q étant des fonctions sur Ω.

5.8.3.2. Définition

Soient deux formes différentielles $\omega_1 = P_1\,\mathrm{d}\, x + Q_1\,\mathrm{d}\, y$ et $\omega_2 = P_2\,\mathrm{d}\, x + Q_2\,\mathrm{d}\, y$ définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Par définition :

i) $\omega_1 = \omega_2 \iff \begin{cases} P_1 = P_2 \\ Q_1 = Q_2 \end{cases}$

ii) $\omega_1 + \omega_2 = (P_1 + P_2)\,\mathrm{d}\, x + (Q_1 + Q_2)\,\mathrm{d}\, y$

iii) $f\omega_1 = (fP_1)\,\mathrm{d}\, x + (fQ_1)\,\mathrm{d}\, y$, si f est une fonction définie sur Ω

5.8.3.3. Définition

Une forme différentielle ω définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est dite *exacte* s'il existe une fonction f différentiable sur Ω telle que $\omega = \mathrm{d}\, f$.

5.8.3.4. Définitions et remarques

i) Une équation différentielle du 1[er] ordre est une équation de la forme :

$$\omega = P(x, y)\,\mathrm{d}\, x + Q(x, y)\,\mathrm{d}\, y = 0. \tag{1}$$

ii) Une solution de (1) est une fonction $*y = \varphi(x)$ définie sur un intervalle I, telle que

$$*\omega = 0 \tag{2}$$

ou encore, ce qui est équivalent, $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

iii) Le graphe d'une solution de (1) est appelé une courbe intégrale de (1).

Soit Γ une courbe intégrale de (1) d'équation $y = \varphi(x)$. L'équation (2) exprime que le vecteur $\overrightarrow{V} = (P(x, \varphi(x)), Q(x, \varphi(x)))$ est normal à Γ au point $M(x, \varphi(x))$.

iv) Si la forme ω est exacte, c'est-à-dire si $\omega = \mathrm{d} f$ l'équation (1) devient :

$$\omega = \mathrm{d} f = f'_x \,\mathrm{d} x + f'_y \,\mathrm{d} y = 0. \tag{1'}$$

Si le domaine de définition de f est convexe, les solutions de (1') sont les fonctions définies implicitement par :

$$f(x, y) = k, \quad \text{où } k \text{ est une constante.} \tag{2'}$$

5.8.3.5. Remarques

1) si l'équation (1) est de la forme :

$$\omega = a(x) \,\mathrm{d} x - b(y) \,\mathrm{d} y. \tag{3}$$

elle est dite à variables séparables. Dans ce cas, si $A(x)$ (resp $B(y)$) est une primitive de $a(x)$ (resp de $b(y)$), la fonction $f(x, y) = A(x) - B(y)$ vérifie $\omega = \mathrm{d} f$; donc ω est exacte et les solutions de (3) sont définies implicitement par l'équation $A(x) - B(y) = k$, où k est une constante.

2) Soit $\omega = P(x, y) \,\mathrm{d} x + Q(x, y) \,\mathrm{d} y$ une forme différentielle exacte sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire :

$$\omega = \mathrm{d} f. \tag{4}$$

où f est une fonction différentiable sur Ω. Si f est de classe C^2 on voit facilement que (4) entraîne :

$$P'_y(x, y) = Q'_x(x, y) \tag{5}$$

Réciproquement on montre que la condition (5) entraîne que ω est exacte.

5.8.3.6. Exemples

Intégrer les équations différentielles :

1) $x \,\mathrm{d} x + y \,\mathrm{d} y = 0$,

2) $x \,\mathrm{d} y - y \,\mathrm{d} x = 0$.

En posant $f(x, y) = x^2 + y^2$, les solutions de 1) sont définies par l'équation implicite : $x^2 + y^2 = k$ car 1) $\Longleftrightarrow$ $f'_x \,\mathrm{d} x + f'_y \,\mathrm{d} y = 0$. D'où les fonctions $y = \sqrt{k - x^2}$ et $y = -\sqrt{k - x^2}$ sont solutions de 1). La solution dont le graphe est $(0, 0)$ est dite solution singulière.

De même pour 2) la solution dont le graphe est $(0, 0)$ est une solution singulière.

Pour $x \neq 0$, 2) est équivalente à : $\dfrac{1}{x} \,\mathrm{d} y - \dfrac{y}{x^2} \,\mathrm{d} x = f'_x \,\mathrm{d} x + f'_y \,\mathrm{d} y = 0$, où $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$. D'où les solutions sont données par $\dfrac{y}{x} = k$, k étant une constante.

5.9. À RETENIR

1 — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction sur Ω. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1.1 — Dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i, au point x_0 :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}}$$

si cette limite existe.

1.2 — f est différentiable en x_0, si et seulement si :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(x - x_0) + ||x - x_0||\varepsilon(x - x_0)$$

où $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$. $L = \mathrm{d} f(x_0)$ est la différentielle de f en x_0 et

$$\boxed{\mathrm{d} f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, \mathrm{d} x_i}$$

où $\mathrm{d} x_i$ est la différentielle de l'application $x \to x_i$.

1.3 — Existence de la différentielle en x_0. Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont définies dans un voisinage de x_0 et continues en x_0, alors f est différentiable en x_0.

2 — <u>Différentielle d'une fonction composée</u>

Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$, différentiable en x_0, et $g : I \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$, dérivable en t_0, avec $g(t_0) = x_0$. Alors $F = fog$ est dérivable en t_0 et on a :

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) g_i'(t_0). \tag{1}$$

La formule (1) s'écrit : $*\mathrm{d} f = \mathrm{d} * f$ où $*$ est le changement de variable $x = g(t)$.

3 — <u>Formule des accroissements finis</u>

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable sur Ω. Alors pour tout couple d'éléments a, b de Ω tels que $[a, b] \subset \Omega$, il existe θ $(0 < \theta < 1)$, tel que :

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta b + (1 - \theta) a)\,(b^i - a^i)$$

4 — Théorème de Schwartz

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si deux dérivées partielles d'ordre $p (p \geq 2)$ de f sont définies dans un voisinage de $a \in \Omega$ et continues en a, et si elles ne différent que par l'ordre des dérivations, alors elles sont égales en ce point.

5 — Formule de Taylor

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^p sur Ω. Alors pour tout couple de points a, b de Ω tel que $[a, b] \subset \Omega$, on a :

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b^i - a^i) + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b^i - a^i)\right]^{(2)}$$
$$+ \dots \frac{1}{(p-1)!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b^i - a^i)\right]^{(p-1)}$$
$$+ \frac{1}{p!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b^i - a^i)\right]^{(p)}.$$

où c est un point du segment ouvert $]a, b[$.

6 — Théorème des fonctions implicites

Soit

$$\begin{aligned} f : \Omega &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

une fonction de classe C^1 sur un ouvert de Ω de $\mathbb{R}^2$. Soit l'équation :

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

On suppose que :

1) il existe $(a, b) \in \Omega$ tel que $f(a, b) = 0$,

2) $f'_y(a, b) \neq 0$.

Alors il existe un intervalle $[a_1, a_2]$ centré en a et une fonction $\varphi : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in [a_1, a_2] \text{ et } b = f(a).$$

φ est dérivable sur $]a_1, a_2[$ et on a : $\varphi'(x) = -\dfrac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))}$.

La fonction φ est dite *fonction implicite* définie par l'équation (1).

5.10. Exercices et problèmes

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a) f est elle continue en $(0,0)$?

b) Montrer que $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \to f(x, \lambda x)$ admet une limite quand x tend vers 0.

2) Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = 1$ si t est rationnel, et 0 sinon. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x^2\Phi(x) + y^2\Phi(y) \end{aligned}$$

a) Montrer que f est continue et différentiable en $(0,0)$.

b) f est-elle continue, différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

3) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^2 \sin \dfrac{1}{t}$ si $t \neq 0$ et $u(0) = 0$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x,y) = u(x) + u(y)$. Montrer que F est différentiable mais que les dérivées partielles ne sont continues.

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy$ si $|y| \leq |x|$, $f(x,y) = -xy$ si $|y| > |x|$. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

5) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, et calculer leurs dérivées partielles si elles existent :

$$f(x,y) = x^2 \sin^2 y; \qquad g(x,y) = \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y}} \quad (1)$$

$$h(x,y) = \operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right); \qquad u(x,y) = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}} \quad (2)$$

6) Étudier les extremums des fonctions suivantes :

i) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$,

ii) $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

7) Trouver trois nombres positifs dont la somme est égale à un nombre positif a donné, et dont le produit est maximum.

8) Donner l'équation du plan tangent et l'équation de la normale à la sphère

$S_2 = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$ au point $P(1,2,2)$.

9) Soit l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0,0) = 0, \quad f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)$$

i) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

ii) f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

10) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p et homogène de degré p $\quad (f(tx) = t^p f(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*)$.

i) En utilisant la formule de Taylor pour f au voisinage de 0, montrer que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{p} t^{k-p} P_k(x) \right) = 0$$

où $P_k(x) = \dfrac{1}{k!} \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(O) \right]^{(k)}$.

ii) En déduire que $f(x) = P_p(x)$.

11) Montrer que la relation $e^{x-y} = 1 + x + y$ définit implicitement une fonction φ telle que $y = \varphi(x)$, au voisinage de $(0,0)$. Déterminer φ' et φ'' au voisinage de $(0,0)$ et en déduire

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2}.$$

12) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y^3 + xy - e^x$. On considère la relation suivante : $f(x,y) = 0$.

a) Montrer que cette relation définit, au voisinage du point $A(0,1)$, la variable y comme fonction implicite de la variable x.

b) Montrer que cette fonction admet, au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre deux. Déterminer ce développement.

13) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application différentiable de classe C^1. On suppose qu'en tout point (x,y,z), $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \neq 0$. Soit S la surface définie par $f(x,y,z) = 0$.

a) Montrer que pour tout point $M \in \mathbb{R}^3$, la dérivée partielle de f par rapport à un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ noté $d_{\vec{u}} f(M)$ est maximale quand $\vec{u} = \overrightarrow{grad} f(M)$.

b) Montrer que $d_{\vec{u}} f(M) = 0$ pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace tangent à S en M.

Chapitre 6 : INTÉGRALE AU SENS DE RIEMANN

6.1. Intégrale d'une fonction bornée définie sur un segment : Définitions et propriétés

6.1.1. Définition

6.1.1.1. Définition

Soit $[a,b]$ $(a \leq b)$ un segment. On appelle subdivision de $[a,b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. n est la longueur de σ. Dans la suite on confondra, la suite σ et l'ensemble $S = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ qu'on appellera aussi : subdivision de $[a,b]$.

Soit $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$, $x_0 = a, x_n = b$ et $x_i < x_{i+1}$, pour $0 \leq i < n$.. On appelle pas de S, le nombre $\varpi(S) = \operatorname{Sup}(x_{i+1} - x_i), 0 \leq i < n$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un élément de l'ensemble D des subdivisions de $[a,b]$.

$$\text{On pose} \quad H = \operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} |f x)|$$

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$M = \operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \qquad (0 \leq i < n)$$

$$\text{et,} \quad M_i = \operatorname*{Sup}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \qquad (0 \leq i < n).$$

On appelle somme de Darboux inférieure de f relativement à S le nombre réel $\underline{S}(f,S) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$, et somme de Darboux supérieure de f relativement à S le nombre réel $\overline{S}(f,S) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$.

Pour tout $S \in D$, et pour tout $S' \in D$, on a : $m(b-a) \leq \underline{S}(f,S) \leq \overline{S}(f,S) \leq M(b-a)$.

6.1.1.2. Définition

On appelle intégrale supérieure de f sur $[a,b]$ le réel

$\overline{I}(f) = \inf\left(\overline{S}(f,S)\right)$, et intégrale inférieure de f sur $[a,b]$ le réel

$\underline{I}(f) = \operatorname{Sup} \underline{S}(f,S)$, $S \in D$.

Théorème (de Darboux)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision S de $[a,b]$, telle que $\varpi(S) < \eta$, on ait :

$$\underline{S}(f,S) \geq I(f) - \varepsilon \text{ et } \overline{S}(f,S) \leq \overline{I}(f) + \varepsilon.$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une subdivision $S' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_n\}$ de $[a,b]$ telle que :

$$\overline{S}(f,S) \leq \overline{I}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{où } \overline{S}(f,S') = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M'_i,$$

$$M'_i = \operatorname*{Sup}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) (0 \leq i < n)$$

Posons : $\eta_1 = \dfrac{\varepsilon}{8n(H+1)}$, où $H = \operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} |f(x)|$, $\eta_2 = \dfrac{1}{2} \inf_{0 \leq i < n} (x'_{i+1} - x'_i)$, et $\eta' = \inf(\eta_1, \eta_2)$.

Soit $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ une subdivision de $[a,b]$ de pas $\varpi(S) < \eta$. Pour tout i, $0 \leq i < n$, il existe p $(0 < p < m)$ tel que: $x_{p-1} \leq x'_i < x_p < \cdots < x_q < x'_{i+1} \leq x_{p+1}$. La portion en S_i de la somme $\overline{S}(f,S) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k)M_k$, où : $M_k = \operatorname*{Sup}_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$, qui correspond au segment $[x'_i, x'_{i+1}]$, $(0 \leq i < n)$, est :

$$S_i \leq (x_p - x'_i)M_{p-1} + \cdots + (x_q - x_{q-1})M_{q-1} + (x'_{i+1} - x_q)M_q.$$

On a : $S_i \leq (x_p - x'_i)M_{p-1} + (x_q - x_p)M'_i + (x'_{i+1} - x_q)M_q$, car :

$M_p \leq M'_i, M_{p+1} \leq M'_i, \ldots, M_q \leq M'_i$, ce qui entraîne :

$S_i \leq (x'_{i+1} - x'_i)M'_i + (x_p - x'_i)(M_{p-1} - M'_i) + (x'_{i+1} - x_q)(M_q - M'_i)$,

d'où : $S_i \leq (x'_{i+1} - x'_i)M'_i + 2H(x_p - x'_i) + 2H(x'_{i+1} - x_q)$,

et : $S_i \leq (x'_{i+1} - x'_i)M'_i + 2H\eta' + 2H\eta' = (x'_{i+1} - x'_i)M'_i + 4H\eta'$.

Il résulte de ces inégalités que : $\overline{S}(f,S) = \sum_{i=0}^{n-1} S_i \leq \sum_{i=0}^{n-1}(x'_{i+1}-x'_i)M'_i +$ $4nH\eta'$, ce qui entraîne : $\overline{S}(f,S) \leq \overline{S}(f,S') + \frac{\varepsilon}{2}$, car : $4nH\eta' \leq \dfrac{4nH\varepsilon}{8n(H+1)}$.
On a donc: $\overline{S}(f,S) \leq \overline{I}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, d'où: $\underline{S}(f,S) \leq \underline{I}(f) + \varepsilon$.

On démontre de la même manière que, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\eta'' > 0$ tel que pour toute subdivision S de $[a,b]$, l'inégalité $\overline{\omega}(S) < \eta''$ implique $\underline{S}(f,S) \geq \underline{I}(f) - \varepsilon$.

En prenant $\eta = \inf(\eta',\eta'')$, alors pour toute subdivision S de $[ab]$, l'inégalité $\overline{\omega}(S) < \eta$ implique : $\overline{S}(f,S) \leq \overline{I}(f) + \varepsilon$ et $\underline{S}(f,S) \geq \underline{I}(f) - \varepsilon$.
Conséquence :

Si (S_n) est une suite de subdivisions de $[a,b]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \overline{\omega}(S_n) = 0$, alors:

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\omega}(f,S_n) = \overline{I}(f) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f,S_n) = \underline{I}(f).$$

6.1.1.3. Définition

Soit f une fonction définie et bornée sur le segment $[a,b]$. On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$; cette valeur commune $I(f)$ sera alors notée $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$, et appelée l'intégrale de f sur $[ab]$.

6.1.1.4. Théorème (Caractérisation des fonctions intégrables)

Soit f une fonction définie et bornée sur un intervalle $[a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$, l'inégalité $\omega(S) < \eta$ entraîne :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon.$$

où $\omega_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) - \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, est l'oscillation de f dans $[x_i, x_{i+1}]$.

Démonstration — Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision S de $[a,b]$, l'inégalité $\overline{\omega}(S) < \eta$ implique les inégalités $\overline{S}(f,S) \leq \overline{I}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ et $\underline{S}(f,S) \geq \underline{I}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Montrons que la condition est nécessaire : si $\overline{I} = \underline{I}$, des inégalités $0 \leq \overline{S}(f,S) - I < \frac{\varepsilon}{2}$ et $0 \leq I - \underline{S}(f,S) < \frac{\varepsilon}{2}$, on déduit, pour $\overline{\omega}(S) < \eta$, que :

$$0 \leq \overline{S}(f,S) - \underline{S}(f,S) < \varepsilon.$$

Ce qui s'écrit :

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon.$$

Montrons que la condition est suffisante. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ vérifiant $\underline{\omega}(S) < \eta$, l'on ait $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon$.

Pour une telle subdivision S on a : $\overline{S}(f, S) - \underline{S}(f, S) < \varepsilon$. Or : $\overline{I} \leq \overline{S}(f, S)$ et $\underline{S}(f, S) \leq \underline{I}$, donc $0 \leq \overline{I} - \underline{I} \leq \overline{S}(f, S) - \underline{S}(f, S) < \varepsilon$.

Exemples:

1) Si $f(x) = c$ pour tout $x \in [a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = c(b - a)$.

2) Soit f la fonction bornée sur $[0, 1]$ définie par :

$f(x) = -1$ si $x \in [0, 1] \cap Q$ et $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1] \backslash \mathbb{Q}$.

Pour toute subdivision $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[0, 1]$ et pour tout i, $0 \leq i < n$, il résulte de la densité dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, que $\operatorname*{Sup}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = 1$ et $\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = -1$

D'où $0 \leq \overline{S}(f, S) - \underline{S}(f, S) = 2$. Il en résulte que cette fonction f n'est pas intégrable sur $[01]$.

Conséquences :

1 — Si f est une fonction définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$, on peut imposer à toutes les subdivisions S de $[a, b]$ de contenir des points fixés à l'avance sans modifier l'intégrabilité ou la non intégrabilité de f.

2 — Si f est une fonction définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$, et intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, $(a < c < b)$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

3 — Si une fonction f, définie et bornée sur $[a, b]$, est intégrable sur $[a, b]$, alors pour tout c, $(a \leq c \leq b)$, f est intégrable sur $[a, c]$.

6.1.1.5. Proposition

— Si f est bornée et intégrable sur $[a, b]$ d'intégrale I, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour toute subdivision $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a\ b]$, l'inégalité $\overline{\omega}(S) < \eta$ entraîne :

$$\left| I - \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i(x_{i+1} - x_i) \right| < \varepsilon. \qquad \forall \mu_i \in [m_i, M_i],$$

avec: $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ et $M_i = \operatorname*{Sup}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$.

Démonstration :

Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision S de pas $\varpi(S) < \eta$, l'on ait :

$$\overline{S}(f,S) \leq \overline{I} + \varepsilon \text{ et } \underline{S}(f,S) > \underline{I} - \varepsilon.$$

Pour une telle subdivision S on a :

$$-\varepsilon < I - \overline{S}(f,S) \leq I - \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i(x_{i+1} - x_i) \leq I - \underline{S}(f,S) < \varepsilon.$$

Conséquence :

Si f est bornée et intégrable sur $[a,b]$, alors:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k(a-b)}{n})\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k(a-b)}{n})\right].\end{aligned}$$

Notons $\mathscr{B}_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions bornées sur $[a,b]$ et $\mathscr{I}_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$.

6.1.2. Propriétés

6.1.2.1. Proposition

Soient $f, g, \in \mathscr{I}_{[a,b]}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1) $f + g \in \mathscr{I}_{[a,b]}$ et $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

2) $\lambda f \in \mathscr{I}_{[a,b]}$ et $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration :

1) Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\tau > 0$ tel que, pour toute subdivision S de $[a,b]$ l'inégalité $\varpi(S) < \eta$ entraîne :

$$0 \leq \overline{S}(f,S) - \underline{S}(f,S) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } 0 \leq \overline{S}(g,S) - \underline{S}(g,S) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $\varpi(S) < \eta$ on a donc :

$$0 \leq \overline{S}(f+g,S) - \underline{S}(f+g,S) \leq \overline{S}(f,S) + \overline{S}(g,S) - \underline{S}(f,S) - \underline{S}(g,S).$$

ce qui entraîne :

$$0 \leq \overline{S}(f+g, S) - \underline{S}(f+g, S) \leq (\overline{S}(f, S) - S(f, S)) + (\overline{S}(g, S) - \underline{S}(g, S)),$$

d'où : $0 \leq \overline{S}(f+g, S) - \underline{S}(f+g, S) < \varepsilon$.

Par suite $f+g$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}\,x = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(f+g)\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]+\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right] \\
&= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x.
\end{aligned}$$

2) Si $\lambda \geq 0$, pour toute subdivision S de $[a, b]$, on a :

$\overline{S}(\lambda f, S) = \lambda\overline{S}(f, S)$ et $\underline{S}(\lambda f, S) = \lambda\underline{S}(f, S)$,

d'où : $\overline{I}\lambda f) = \lambda\overline{I}(f)$ et $\underline{I}(\lambda f) = \lambda\underline{I}(f)$.

Si $\lambda < 0$, pour toute subdivision S de $[a, b]$, on a :

$\overline{S}(\lambda f, S) = \lambda\underline{S}(f, S)$ et $\underline{S}(\lambda f, S) = \lambda\overline{S}(f, S)$, d'où :

$\overline{I}(\lambda f) = \lambda\underline{I}(f)$ et $\underline{I}(\lambda f) = \lambda\overline{I}(f)$.

Dans tous les cas, si f est intégrable sur $[a, b]$, on a donc : $\overline{I}(\lambda f) = \underline{I}(\lambda f)$ et par suite :

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}\,x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Conséquence :

$\mathscr{I}_{[a,b]}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application : $I : \mathscr{I}_{[a,b]} \to \mathbb{R}$
$f \mapsto I(f)$ est linéaire.

6.1.2.2. Proposition

Si $f, g \in \mathscr{I}_{[a,b]}$, alors $fg \in \mathscr{I}_{[a,b]}$.

Démonstration — Supposons d'abord $f \geq 0$ et $g \geq 0$ sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f et g sont intégrables sur $[a, b]$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $S = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a, b]$ de pas $\varpi(S) < \eta$, l'on ait :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2(1+H')}.$$

et

$$\sum_{i=0} n-1(M'_i - m'_i)(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2(1+H)}.$$

avec $M_i = \sup_{x\in[x_i,\,x_{i+1}]} f(x)$,

$m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$,

$H = \sup_{0\le i\le n-1} M_i$,

$M'_i = \sup_{x\in[x_i,\,x_{i+1}]} g(x)$,

$m'_i = \inf_{x\in[x_i,\,x_{i+1}]} g(x)$,

$H' = \sup_{0\le i\le n-1} M'_i$.

Posons : $D_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)g(x)$, $d_i = \inf_{x\in[x_i,\,x_{i+1}]} f(x)g(x)$, on a les inégalités : $0 \le D_i - d_i \le M_iM'_i - m_im'_i$, d'où

$$\sum_{i=0}^{n-1}(D_i - d_i)(x_{i+1} - x_i) \le \sum_{i=0}^{n-1}(M'_iM_i - m'_im_i)(x_{i+1} - x_i)$$
$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\left[(M_i - m_i)M'_i + (M'_i - m'_i)m_i\right](x_{i+1} - x_i).$$

Il en résulte que

$$\sum_{i=0}^{n-1}(D_i - d_i)(x_{i+1} - x_i) \le H'\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$$
$$+ H\sum_{i=0}^{n-1}(M'_i - m'_i)(x_{i+1} - x_i).$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{n-1}(D_i - d_i)(x_{i+1} - x_i) \le \frac{H'\varepsilon}{2(1+H')} + \frac{H\varepsilon}{2(1+H)} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

— Supposons maintenant que f et g sont deux fonctions bornées et intégrables quelconques sur $[a,b]$. Posons $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $m' = \inf\limits_{x\in[a,b]} g(x)$.

On a alors : $fg = (f-m)(g-m')+m'f+mg-mm'$, d'où l'intégrabilité de fg, car $(f-m)$ et $(g-m)$ sont positives sur $[a,b]$.

6.1.2.3. Proposition :

Si $f \in \mathscr{I}_{[a,b]}$ alors : $f^+ = \mathrm{Sup}(f,0) \in \mathscr{I}_{[a,b]}$ et $f^- = \inf(f,0) \in \mathscr{I}_{[a,b]}$.

Démonstration — Soit une subdivision $S = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a,b]$, on pose $M_i = \mathrm{Sup}\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$,
$D_i = \mathrm{Sup}\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f^+(x)$, $d_i = \inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f^+(x)$

Soit $\varepsilon > 0$, f étant intégrable sur $[a,b]$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision $S = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a,b]$ de pas inférieur à η, l'on ait $\sum\limits_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \varepsilon$.

Si $M_i \leq 0$, alors $D_i = d_i = 0$, et on a $0 = D_i - d_i \leq M_i - m_i$,

si $m_i \geq 0$, alors $D_i = M_i$ et $d_i = m_i$ et on a $0 \leq D_i - d_i = M_i - m_i$,

si $M_i \geq 0$ et $m_i \leq 0$, alors $D_i = M_i$ et $d_i = 0$ et on a : $0 \leq D_i - d_i \leq M_i - m_i$.

Donc, dans tous les cas on a $0 \leq D_i - d_i \leq M_i - m_i$, d'où $\sum\limits_{i=0}^{n-1}(D_i - d_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \sum\limits_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon$, et l'intégrabilité de f^+ en résulte.

L'intégrabilité de f^- sur $[a,b]$ résulte du fait que $f^- = -(-f)^+$.

Corollaire 1 — Si $f \in \mathscr{I}_{[a,b]}$, alors $|f| \in \mathscr{I}_{[a,b]}$.

Démonstration : Ce résultat s'obtient en remarquant que $|f| = f^+ - f^-$.

Corollaire 2 — Si $f, g \in \mathscr{I}_{[a,b]}$, alors $\mathrm{Sup}(f,g)$, $\inf(f,g) \in \mathscr{I}_{[a,b]}$.

Démonstration : Ce résultat s'obtient en remarquant que : $\mathrm{Sup}(f,g) = \frac{1}{2}(|f-g| + f + g)$, $\inf(f,g) = -\mathrm{Sup}(-f,-g)$.

6.1.2.4. Proposition

Soient f et g deux fonctions définies, bornées et intégrables sur $[a\ b]$.

1) Si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

2) Si $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$.

3) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$.

Démonstration :

1) Si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a\ b]$, alors pour toute subdivision S de $[a, b]$ on a $\overline{S}(f, S) \geq 0$, d'où

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \overline{I}(f) \geq 0.$$

2) D'après 1), on a : $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}\,x \geq 0$: or

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x, \text{ donc}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

3) On a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ $\forall x \in [a\ b]$, donc

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x.$$

Il en résulte que $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$.

6.2. Exemples fondamentaux de fonctions intégrables

6.2.1. Proposition

Toute fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration — f étant continue sur $[a, b]$, elle est bornée sur $[a, b]$. D'autre part, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout couple (x, x') de $[a\ b] \times [a, b]$, l'inégalité $|x - x'| < \eta$ entraîne $|f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{b - a + 1}$.

Soit $S = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$ de pas strictement inférieur à η Alors, pour tout i, $0 \leq i \leq n - 1$, il existe $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et $z_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tels que $M_i = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(y_i)$ et $m_i = \displaystyle\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(z_i)$.

On a alors $(M_i - m_i) = |f(y_i) - f(z_i)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a+1}$, car $|y_i - z_i| < \eta$.

D'où $\sum\limits_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a+1}\sum\limits_{i=0}^{n-1} x_{i+1} - x_i = \dfrac{(b-a)\varepsilon}{b-a+1} < \varepsilon$.

ε étant quelconque, ceci prouve que f est intégrable sur $[a, b]$.

6.2.2. Proposition

Toute fonction monotone sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration. On suppose f croissante. Dans le cas contraire, on se ramène à cette hypothèse en considérant la fonction $g = -f$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{b-a}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$.

Soit $S = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$ de pas inférieur à $\eta = \dfrac{b-a}{n_0}$.

Alors on a

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_{i+1}) - f(x_i)\right](x_{i+1} - x_i) \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_{i+1}) - f(x_i)\right].$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_{i+1}) - f(x_i)\right](x_{i+1} - x_i) \leq \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right] < \varepsilon.$$

D'où l'intégrabilité de f sur $[a, b]$.

6.2.3. Fonctions continues par morceaux

6.2.3.1. Définition

Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $S = \{c_0 = a, c_1, \ldots, c_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que pour $0 \leq i \leq n-1$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ est continue.

6.2.3.2. Proposition

Si f est continue par morceaux et est bornée sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration — Soit : $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n+1} < c_n = b$ la suite finie croissante des extrémités des intervalles de la partition associée à f.

Pour montrer que f est intégrable sur $[a, b]$, il suffit de montrer que, pour tout $k (0 \leq k \leq n-1)$, f est intégrable sur $[c_k, c_{k+1}]$.

Considérons $[c_k, c_{k+1}](0 \leq k \leq n-1)$ et soit $\eta > 0$ tel que $c_k < c_k + \eta < c_{k+1} - \eta < c_{k+1}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur $[c_k + \eta, c_{k+1} - \eta]$, il existe donc une subdivision $S' = \{x'_0 = c_k + \eta, x'_1, \ldots, x'_n = c_{k+1} - \eta\}$ telle que $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega'_i(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, où $\omega'_i = M_i - m_i$ est l'oscillation de f sur $[x'_i, x'_{i+1}](0 \leq i \leq n-1)$.

Soit $S = \{x_0 = c_k, x_1, \ldots, x_m = c_{k+1}\}$ une subdivision de $[c_k, c_{k+1}]$ de pas inférieur à celui de S'. En notant $H = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$ et ω_i l'oscillation de f sur $[x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leq H[(c_k + \eta) - c_k] + \sum_{i=0}^{n-1} \omega'_i(x'_{i+1} - x'_i)$$
$$+ H[c_{k+1} - (c_{k+1} - \eta)]$$

ce qui entraîne : $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leq \eta H + \frac{\varepsilon}{2} + \eta H$,

d'où $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\eta H$.

Pour que l'on ait $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leq \varepsilon$, il suffit donc de choisir η tel que $\eta < \frac{\varepsilon}{4(H+1)}$.

6.2.4. Fonctions en escalier

6.2.4.1. Définition

Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $D = \{c_0 = a < c_1 < \cdots < c_{k-1} < c_k = b\}$ de $[a, b]$ telle que pour tout i $(0 \leq i \leq k-1)$, la valeur de f sur $[x_i + x_{i+1}[$ est une constante A_i.

6.2.4.2. Proposition

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ et si $D = \{c_0 = a < c_1 < \cdots < c_{k-1} < c_k = b\}$ est une subdivision de $[a, b]$ telle que $f([c_i, c_{i+1}[) = \{A_i\}$ pour tout $i(0 \leq i \leq k-1)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k-1} A_i(c_{i+1} - c_i).$$

Démonstration — L'intégrabilité de f résulte du fait que f est continue par morceaux sur $[a, b]$. Pour tout $i(0 \leq i \leq k-1)$, posons

$$g_i(x) = \begin{cases} A_i & \text{si } x \in [c_i, c_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$g_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a, b[\\ g_k(b) = f(b) \end{cases}$$

On a $f = g_0 + g_1 + \cdots + g_{k-2} + g_k$. Comme les fonctions $g_i \quad (0 \leq i \leq k)$ sont escalier sur $[a, b]$, elles sont intégrables sur $[a, b]$: il suffit donc de montrer que, pour tout $i (0 \leq i \leq k)$,

$$\int_a^b g_i(x)\,\mathrm{d}x = A_i(c_{i+1} - c_i),\ (0 \leq i \leq k-1) \text{ et que } \int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Soit $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ fixé, et soit $S = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b\}$ une subdivision de $[a, b]$. On suppose $A_i \geq 0$.

Soit $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n_i} \leq c_i < x_{n_i+1} < \cdots < x_{n_i+j} \leq c_{i+1} < x_{n_i+j+1} < \cdots < x_m = b$.

On a :

$$\begin{aligned}\overline{S}(g_i, S) = 0 &\left[(x_1 - x_0) + \cdots + (x_{n_i} - x_{n_i+1})\right] \\ &+ A_i \left[(x_{n_i+1} - x_{n_i}) + \cdots + (x_{n_i+j+1} - x_{n_i+j})\right] \\ &\qquad + 0\left[(x_{n_i+j+2} - x_{n_i+j+1}) + \cdots + (x_m - x_{m-1})\right]\end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\overline{S}(g_i, S) = A_i(x_{n_i+j+1} - x_{n_i}) \geq A_i(c_{i+1} - c_i).$$

De même on a : $\underline{S}(g_i, S) \leq 0[(x_1 - x_0) + \cdots + (c_i - x_{n_i})] + A_i[(x_{n_i+1} - c_i) + \cdots + (c_{i+1} - x_{n_i+j})] + 0[(x_{n_i+j+1} - c_{i+1}) + \cdots + (x_m - x_m - 1)]$, ce qui entraîne :

$$\underline{S}(g_i, S) \leq A_i(c_{i+1} - c_i).$$

Comme g_i est intégrable sur $[a, b]$, il en résulte que $\displaystyle\int_a^b g_i(x)\,\mathrm{d}x = \overline{I}(g_i) = \underline{I}(g_i) = A_i(c_{i+1} - c_i)$. Supposons $g_k(b) = f(b) \geq 0$ et soit $S = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m\}$ une subdivision de $[a, b]$.

On a : $\underline{S}(g_k, S) = 0(x_1 - x_0) + 0(x_2 - x_1) + \cdots + 0(x_m - x_{m-1}) = 0$

donc : $\displaystyle\int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x = \underline{I}(g_i) = 0$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b g_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k-1} A_i(c_{i+1} - c_i)$.

6.2.5. Théorème

Si f est une limite uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, bornées et intégrables sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

Démonstration :

a) Montrons d'abord que f est intégrable sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$f_{n_0}(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \le f(x) \le f_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Il en résulte que : $f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y) - \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \le f(x) - f(y) \le f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y) + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $\forall x, y \in [a,b]$. Comme f_{n_0} est intégrable sur $[a,b]$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision

$$S = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = b\} \quad \text{de}\,[a,b]$$

de pas inférieur à η, on ait :

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i'(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

où $\omega_i' = \sup\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f_{n_0}(x) - \inf\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f_{n_0}(x)$ est l'oscillation de f_{n_0} sur $[x_i, x_{i+1}]$; notant ω_i l'oscillation de f sur $[x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$\omega_i' - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \le \omega_i \le \omega_i' + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i'(x_{i+1} - x_i) \le \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i' + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

f est donc intégrable sur $[a,b]$.

b) Montrons maintenant que (*) est vrai. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \ge n_0$, l'on ait :

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} \le f(x) \le f_n(x) + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

donc : $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \le \int_a^b f(x) \le \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$, pour $n \ge n_0$

d'où : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$

6.2.6. Fonctions réglées

6.2.6.1. Définition

Une fonction numérique f définie sur un intervalle $[a,b]$ est dite réglée sur $[a,b]$, si f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$. Il résulte du théorème précédent que :

6.2.6.2. Proposition

Toute fonction réglée définie sur un intervalle $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

6.2.6.3. Proposition

Si f est réglée sur $[a,b]$, alors l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Démonstration — Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit H_n l'ensemble fini des points de discontinuité de g_n, et soit $H=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$. H est un ensemble dénombrable.

Si $x\in[a,b]\backslash H$, les fonctions g_n sont toutes continues au point x, donc f est aussi continue au point x d'après le théorème 2.2.9.2.9 chapitre 2. Il en résulte que l'ensemble D des points de discontinuité de f est contenu dans H, et est donc dénombrable.

6.2.6.4. Théorème (Caractérisation des fonctions réglées)

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a,b]$. Alors f est réglée sur $[a,b]$ si et seulement si f admet en tout point de $[a,b[$ une limite à droite et en tout point de $]a,b]$ une limite à gauche.

Démonstration — Supposons f réglée et soit $x\in[a,b[$. Pour $\varepsilon>0$, il existe une fonction en escalier g sur $[a,b]$ telle $\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\eta>0$ tel que g soit constante sur $]x,x+\eta[$. Pour tout $(y,y')\in\,]x,x+\eta[\times]x,x+\eta[$ on a : $|f(y)-f(y')|\leq|f(y)-g(y)|+|g(y)-g(y')|+|g(y')-f(y')|<\varepsilon$.

Il en résulte que f admet une limite à droite au point x. On démontre de la même manière que f admet une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.

Supposons que f admette en tout point de $[a,b[$ une limite à droite et en tout point de $]a,b]$ une limite à gauche. Soit $\varepsilon>0$, pour tout $x\in[a,b[$, il existe $d_x\in\mathbb{R}, d_x>x$ tel que $]x,d_x[\subset[a,b[$ et, pour tout couple (y,y') d'éléments de $[x,dx[$, $|f(y)-f(y')|<\varepsilon$.

Pour tout $x\in]a,b]$, il existe $c_x\in\mathbb{R}, c_x<x$ tel que $]c_x,x[\subset]a,b]$ et, pour tout couple (y,y') d'éléments de $]c_x,x[$, $|f(y)-f(y')|<\varepsilon$. Les intervalles $]-\infty,d_a[$, $]c_b,+\infty[$ et $]c_x,d_x[$, $x\in]a,b[$, recouvrent l'intervalle fermé borné $[a,b]$: il existe donc des points $x_1,x_2,\ldots,x_k$ de $]a,b[$, tels que :

$$[a,b]=[a,d_a[\cup]c_{x_1},d_{x_1}[\cup\cdots\cup]c_{x_k},d_{x_k}[\cup]c_b,b].$$

Notons S l'ensemble des points a,b,c_{x_i},d_{x_i},x_i, $1\leq i\leq k$, que l'on range en une suite strictement croissante $a=a_0,a_1,\ldots,a_n=b$. Pour $0\leq i\leq n-1$, soit θ_i un élément de $]a_i,x_{i+1}[$, et soit g la fonction en escalier définie sur $[a,b]$ de la manière suivante : pour $k=0,1,\ldots,n$, $g(a_k)=f(a_k)$. Si $x\in]a_i,x_{i+1}[$ $(0\leq i\leq n-1)$ $g(x)=f(\theta_i)$. Pour tout $x\in[a,b]$, on a $|g(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Corollaire : Toute fonction monotone sur un segment $[a,b]$ est réglée. En effet une fonction monotone admet en tout point de son domaine de définition une limite à gauche et une limite à droite quand cela a un sens.

Notation : Si f est intégrable sur $[a,b]$ avec $a < b$, on note $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.** Et on pose : $\int_\alpha^\alpha f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$.

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a,b]$, avec $a \leq b$.

1) Si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq 0.$$

2) Si $g(x) \leq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

3) $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$

4) Si $c \in [a,b]$ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

6.3. Primitives

6.3.1. Proposition

Soit f une fonction numérique définie et intégrable sur un intervalle $[a,b]$. Alors la fonction F définie en tout point x de $[a,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est uniformément continue sur $[a,b]$.

Démonstration.— Soient x et y deux éléments de $[a,b]$, $x < y$. On a $F(x) - F(y) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}\,t$

donc : $|F(x) - F(y)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}\,t \leq k|x-y|$,

où $k = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

6.3.2. Proposition

Soit f une fonction numérique intégrable sur un intervalle $[a, b]$ et soit $t_0 \in [a, b]$ tel que f admette en t_0 une limite à droite (resp. à gauche). Alors la fonction :

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable à droite (resp. à gauche) en t_0 et sa dérivée à droite (resp. à gauche) en t_0 est égale à la limite de f quand t tend vers t_0 par valeurs supérieures (resp. par valeurs inférieures).

Démonstration — Montrons par exemple que F est dérivable à droite en t_0 si f admet une limite à droite quand t tend vers t_0. Posons $l = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t)$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in]t_0, t_0 + \eta[$ l'on ait $|f(t) - l| < \varepsilon$.

On a alors, pour $t \in]t_0, t_0 + \eta[$, $F(t) - F(t_0) = \displaystyle\int_{t_0}^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

Comme : $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ pour tout $x \in]t_0, t_0 + \eta[$, on a :

$(t - t_0)(l - \varepsilon) \leq F(t) - F(t_0) \leq (t - t_0)(l + \varepsilon)$,

ce qui entraîne : $\dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - l < \varepsilon$ pour tout $t \in]t_0, t_0 + \eta[$.

D'où : $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = l$.

Corollaire 1 — Si f est une fonction réglée sur $[a, b]$, alors la fonction $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ admet en tout point de $[a, b[$ une dérivée à droite, et en tout point de $]a, b]$ une dérivée à gauche.

Corollaire 2— Si f est continue sur $[a, b]$ alors la fonction $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ est dérivable sur $[a, b]$ et $F'(t) = f(t)$ pour tout $t \in [a, b]$.

6.3.3. Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute application $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

6.3.4. Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et admettant une primitive F sur I, alors toute autre primitive G de f sur I est de la forme $G = F + c$ où c est une constante réelle.

Démonstration — La fonction $x \to G(x) - F(x)$ est dérivable sur I, et $\forall x \in I$ $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) - F(x) = c$ pour tout élément x de I.

6.3.5. Proposition

Toute fonction numérique définie continue sur un intervalle I admet une primitive dans cet intervalle.

Démonstration — Soit $c \in I$. D'après le corollaire de la proposition 6.3.2 l'application $x \mapsto F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est une primitive de f sur I.

Théorème : Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et admettant une primitive G sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = G(b) - G(a)$$

Démonstration : La fonction $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ étant une primitive de f sur $[a, b]$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = G(x) + c$ pour tout x de I, et on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) - G(a).$$

Notation : Si g est une fonction définie sur $[a, b]$ on note $[g(t)]_a^b = g(b) - g(a)$.

Exemple 1 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}\,x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

Exemple 2 : $\int_2^7 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = [\mathrm{Log}\,x]_2^7 = \mathrm{Log}\,7 - \mathrm{Log}\,2 = \mathrm{Log}\,\frac{7}{2}.$

Notation : Si f est une fonction continue sur un intervalle I, on désigne par $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ toute primitive de f sur I. Si F est une primitive de f sur I, on a $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(x) + c$.

On donne dans le tableau suivant les primitives F de quelques fonctions usuelles f sur intervalle I.

f	F	I
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
x^{-n} ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$)	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$	$\mathbb{R}^*$
x^r ($r \in \mathbb{R}$ et $r \neq -1$)	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$\mathbb{R}_+^*$

f	F	I
x^{-1}	$\operatorname{Log}\lvert x\rvert + c$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
a^x $(a>0,\ a\neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\operatorname{Log} a} + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{Log}\lvert\cos x\rvert + c$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$
$\operatorname{cotg} x$	$\operatorname{Log}\lvert\sin x\rvert + c$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x + x$	$]-1,1[$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arccos} x + c$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctg} x + c$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + c$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + c$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{Arg\,sh} x + c =$ $\operatorname{Log}(x+\sqrt{x^2+1}) + c$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arg\,ch} x + c =$ $\operatorname{Log}(x+\sqrt{x^2-1}) + c$	$]1,+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Log}\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert + c$	$]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{Arg} x + c =$ $\dfrac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + c$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\operatorname{Log}\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + c$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

6.4. Formules de la moyenne

6.4.1. Proposition

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que $f(x) \geq 0$ sauf peut être pour un nombre fini d'éléments de $[a, b]$ et que $m \leq g(x) \leq M$ sauf peut être pour un nombre fini d'éléments de $[a, b]$. Alors on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = k\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad \text{où} \quad m \leq k \leq M$$

appelée formule de la moyenne.

Démonstration : On a $mf(x) \leq g(x)f(x) \leq Mf(x)$ sauf peut-être pour un nombre fini d'éléments de $[a, b]$, d'où: $m\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq M\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Comme la fonction $t \mapsto t\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ est continue sur $[m, M]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $k \in [m, M]$ tel que $\int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Remarque: si la fonction g est continue, il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un point c de $[a, b]$ tel que $k = g(c)$, d'où :

Corollaire 1 (première formule de la moyenne) : Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. On suppose que g est continue sur $[a, b]$ et que $f(x) \geq 0$ sauf peut être pour un nombre fini d'éléments de $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que: $\int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x = g(c)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Corollaire 2 : Si g est une fonction continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x = (b-a)g(c)$.

On obtient ce résultat en prenant dans l'égalité du corollaire 1, $f(x) = 1\ \forall x \in [a, b]$.

6.4.2. Proposition (deuxième formule de la moyenne)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. On suppose f positive et décroissante sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x = f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Démonstration. Soit $S = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de

$[a, b]$ et soit G la fonction définie sur $[a, b]$ par $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [a, b]$.

On a $G(x_{i+1}) - G(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(t)\,\mathrm{d}t = k_i(x_{i+1} - x_i)$
où $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x) \leq k_i \leq \sup\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x) = M_i$.

Posant $A(S) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} k_i f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$, on va montrer que :

$$\lim_{\omega(S)\to 0}\left(A(S) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)g(x_i)(x_{i+1} - x_i)\right) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left|A(S) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)g(x_i)(x_{i+1} - x_i)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(k_i - g(x_i))\,(x_{i+1} - x_i)\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i)|\;|k_i - g(x_i)|\;|x_{i+1} - x_i| \\
&\leq f(a)\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i),
\end{aligned}$$

et comme g est intégrable on a : $\lim\limits_{\omega(S)\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$, d'où $\int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\omega(s)\to 0} A(S)$. Or

$$\begin{aligned}
A(S) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)k_i(x_{i+1} - x_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(G(x_{i+1}) - G(x_i)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} G(x_i)\,(f(x_{i+1}) - f(x_i)) + G(x_n) - G(x_{n-1})
\end{aligned}$$

car $G(x_0) = G(a) = 0$.

Posons $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} G(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} G(x)$, on obtient $m \cdot f(a) \leq A(S) \leq M \cdot f(a)$, et par suite

$$f(a)\cdot m \leq \lim_{\omega(S)\to 0} A(S) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq f(a)\cdot M.$$

Comme G est continue sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = f(a)G(c) = f(a)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

6.5. Changement de variable Intégration par parties

6.5.1. Changement de variable

Théorème. Soit φ une fonction numérique définie, continue et dérivable sur un intervalle $[a,b]$. On suppose φ' continue sur $[a,b]$. Alors pour toute fonction numérique f définie et continue sur le segment $\varphi([a,b])$, on a la formule appelée *formule de changement de variables* :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Démonstration — Comme φ est continue sur $[a,b]$, $\varphi([a,b])$ est un segment. Considérons sur $\varphi([a,b])$ la fonction $u \mapsto F(u) = \displaystyle\int_{\varphi(a)}^{u} f(x)dx$. Alors les fonctions

$$t \mapsto H(t) = F[\varphi(t)] = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\text{et } t \mapsto G(t) = \int_a^t f[\varphi(x)]\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x$$

sont définies continues et dérivables sur $[a,b]$ et on a, pour tout $t \in [a,b]$, $H'(t) = \varphi'(t)\cdot f[\varphi(t)]$ et $G'(t) = \varphi'(t)f[\varphi(t)]$. Il en résulte que $H'(t) = G'(t)$ pour tout $t \in [a,b]$, d'où

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}\,x = H(b) = G(b) = \int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Exemples :

1 — Soient a et b deux réels, $1 < a < b$. Pour calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x(\operatorname{Log} x)^2}\,\mathrm{d}\,x$, on pose $t = \operatorname{Log} x$, d'où $\mathrm{d}\,t = \dfrac{\mathrm{d}\,x}{x}$. On a ainsi : $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}\,x}{x(\operatorname{Log} x)^2} = \int_{\operatorname{Log} a}^{\operatorname{Log} b} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}\,t = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\operatorname{Log} a}^{\operatorname{Log} b} = \frac{1}{\operatorname{Log} a} - \frac{1}{\operatorname{Log} b}$

2 — Pour calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^4 x\,\mathrm{d}\,x$, on pose $t = \sin x$, on a alors $\mathrm{d}\,t = \cos x\,\mathrm{d}\,x$, d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ \sin x\ \mathrm{d}\,x = \int_0^1 t^4\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{5}.$

6.5.2. Intégration par parties

Théorème — Soient U et V deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que les fonctions dérivées U' et V' sont continues sur $[a, b]$. Alors on a la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b U(x)V'(x)\,\mathrm{d}x = [U(x)V(x)]_a^b - \int_a^b U'(x)V(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration — La fonction $(UV)' = U'V + UV'$ est continue sur $[a, b]$ et on a : $\displaystyle\int_a^b (UV)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b U'(x)V(x)dx + \int_a^b U(x)V'(x)\,\mathrm{d}x$ ce qui entraîne $\displaystyle[U(x)V(x)]_a^b = \int_a^b U'(x)V(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b U(x)V'(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemples :

1) En posant $U(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et $V(x) = \operatorname{Log} x$, on a :

$$\int_1^{\mathrm{e}} x \operatorname{Log} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{Log} x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{2}.$$

2) En posant $U(x) = \operatorname{Arc\,tg} x$ et $V(x) = x$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \operatorname{Arctg} x\,\mathrm{d}x &= [x \operatorname{Arctg} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= [x \operatorname{Arctg} x]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\operatorname{Log}(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2.\end{aligned}$$

6.6. Techniques d'intégration

6.6.1. Intégration des fractions rationnelles

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ premiers entre eux, où $Q(x)$ est différent du polynôme nul. Dans le cours d'algèbre on montre qu'on peut écrire :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{k,i}}{(x-a_k)^i} + \sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{d_\epsilon} \frac{B_{\epsilon,j}x + C_{\epsilon,j}}{[(x-b_\epsilon)^2 + c_\epsilon^2]^j}$$

où les $A_{k,i}, a_k, B_{\epsilon,j}, C_{\epsilon,j}, b_\epsilon$ sont des réels et les c_ϵ des réels non nuls. Ceci ramène le calcul des primitives des fractions rationnelles $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ à

celui des primitives des fractions simples du type $\dfrac{1}{(x-a)^n}$, ($n \in \mathbb{N}^*$) et du type $\dfrac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}$ où $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a les résultats suivants :

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}\,x = A\operatorname{Log}|x-a| + c.$

2) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$, si $n \geq 2$.

3) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{A(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{Aa+B}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}\,x.$
si $b \neq 0$.

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}[(x-a)^2+b^2] + \frac{Aa+B}{b}\operatorname{Arctg}(\frac{x-a}{b}) + C$$

4) Calcul de $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,\mathrm{d}\,x$, $b \neq 0$, $n \geq 2$

On a :

$$\int \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{A(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{Aa+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,\mathrm{d}\,x.$$

$$\int \frac{A(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{A}{(1-n)\,[(x-a)^2+b^2]^{n-1}} + C;$$

Pour ce qui est de $\displaystyle\int \frac{Aa+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,\mathrm{d}\,x$, en effectuant le changement de variables $y = \dfrac{x-a}{b}$, elle devient $\dfrac{Aa+B}{b}\displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)^n}\,\mathrm{d}\,y$. Il s'agit donc de chercher les primitives de fractions du type $\dfrac{1}{(x^2+1)^n}$, $n \geq 1$.

Posons $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}\,x$, $n \geq 1$. On peut intégrer par parties en posant $U'(x) = 1$ et $V(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1} \end{aligned}$$

d'où $2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

Sachant que $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \operatorname{Arctg} x + C$. la formule (1) permet de calculer $I_n (n \geq 2)$ par récurrence.

Exemples :

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+\frac{3}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} +$ C

2) Calcul de $\displaystyle\int \frac{x^6+x^5+x^4-x^3-x^2+6x-2}{(x-1)^3+(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$

On a :

$$\frac{x^6+x^5+x^4-x^3-x^2+6x-2}{(x-1)^3+(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}$$

et

$$\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x = \operatorname{Log}|x-1| + C_1$$

$$\int \frac{2}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{2}{x-1} + C_2$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C_3$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \operatorname{Arctg} x + C_4$$

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} + I_2 = -\frac{1}{x^2+1} + I_2$$

or

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} x + C_5$$

donc

$$\int \frac{x^6+x^5+x^4-x^3-x^2+6x-2}{(x-1)^3+(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \operatorname{Log}|x-1| + \frac{-4x+3}{(x-1)^2} + \frac{x-2}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\operatorname{Arctg} x + C.$$

6.6.2. Intégrales de la forme $\int$ P(cos x, sin x) dx où P(X,Y)$\in \mathbb{R}$[X,Y]

En considérant $P(\cos x, \sin x)$ comme polynôme en $\sin x$ à coefficients dans $\mathbb{R}[\cos x]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
P(\cos x, \sin x) &= \sum_{k\geq 0} P_k(\cos x) sin^k x \\
&= \sum_{p\geq 0} P_{2p}(\cos x) sin^{2p} x + \sum P_{2q+1}(\cos x) sin^{2q+1} x \\
&= \sum_{p\geq 0} (1 - cos^2 x)^p P_{2p}(\cos x) \\
&\qquad + \sum_{q\geq 0} (1 - cos^2 x)^q P_{2q+1}(\cos x) \sin x \\
&= Q_0(\cos x) + Q_1(\cos x) \cdot \sin x
\end{aligned}$$

où Q_0 et Q_1 sont des éléments de $\mathbb{R}[x]$. En posant $u = \cos x$, on obtient : $\int Q_1(\cos x)\sin x \, \mathrm{d}\, x = -\int Q_1(u) \, \mathrm{d}\, u$ qui est simple à calculer.

Pour ce qui est des primitives de $Q_0(\cos x)$, il suffit de savoir calculer les intégrales de la forme $\int cos^n x \, \mathrm{d}\, x$ ou $n \in \mathbb{N}$. Pour cela on linéarise $cos^n x$ en posant $\cos x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, x})$: si $n = 2p$, alors

$$\begin{aligned}
cos^{2p} x &= \frac{1}{2^{2p}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, x})^{2p} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \mathrm{C}_{2p}^{k}\, \mathrm{e}^{(2p-2k)\mathrm{i}\, x} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_{2p}^{k}\, \mathrm{e}^{(2p-2k)\mathrm{i}\, x} + \mathrm{C}_{2p}^{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_{2p}^{2p-k} + \mathrm{e}^{-(2p-2k)\mathrm{i}\, x} \right] \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left[\mathrm{C}_{2p}^{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_{2p}^{k} \left(\mathrm{e}^{(2p-2k)\mathrm{i}\, x} + \mathrm{e}^{-(2p-2k)\mathrm{i}\, x} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left[\mathrm{C}_{2p}^{p} + \sum_{k=0}^{p-1} 2\mathrm{C}_{2p}^{k} \cos(2p - 2k)x \right]
\end{aligned}$$

En posant $s = p - k$, on obtient :

$$\cos^{2p} x = \frac{1}{2^{2p}} \left[\mathrm{C}_{2p}^{p} + 2 \sum_{s=1}^{p} \mathrm{C}_{2p}^{p-s} \cos 2sx \right]$$

d'où $\displaystyle\int \cos 2p\,x\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2^{2p}}\left[C_{2p}^{p} x + \sum_{s=1}^{p} C_{2p}^{p-s}\frac{\sin 2sx}{s}\right] + C$

Si $n = 2p+1$, alors

$$\begin{aligned}\cos^{2p+1} x &= \frac{1}{2^{2p+1}}\left[\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{k}\,e^{(2p+1-2k)\imath x}\right.\\ &\quad\left.+\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{2p+1-k}\,e^{-(2p+1-2k)\imath x}\right]\\ &= \frac{1}{2^{2p+1}}\left[2\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{k}\cos(2p+1-2k)x\right]\\ &= \frac{1}{2^{2p}}\sum_{\lambda=0}^{p} C_{2p+1}^{p-\lambda}\cos(2\lambda+1)x\end{aligned}$$

d'où

$$\int \cos^{2p+1} x\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{\lambda=0}^{p} C_{2p+1}^{p-\lambda}\frac{\sin(2\lambda+1)x}{2\lambda+1}$$

Exemples :

$$\int \sin^3 x\ \mathrm{d}\,x = \int (1-\cos^2 x)\sin x\ \mathrm{d}\,x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$\int \cos^4 x\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{8}\int (\cos 4x + 4cos2x + 3)\ \mathrm{d}\,x = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{8}x + C.$$

6.6.3. Intégrales de la forme $\int R(\cos x, \sin x)\ \mathrm{d}\,x$, où R est une fraction rationnelle

En général, on effectue le changement de variables $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, qui n'est valable que sur des intervalles sur lesquels $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ et $R(\cos x, \sin x)$ sont définies. On a alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}\,x = \frac{2\,\mathrm{d}\,t}{1+t^2}$$

d'où

$$\int R(\cos x, \sin x)\ \mathrm{d}\,x = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}\,t$$

où $R_1(t) = R\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}$ est une fonction rationnelle en t.

Exemple : Calcul de $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}\,x$

Posons $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, on a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{2}{t^2+2t+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t\\ &= 2\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}\,x &= 2\operatorname{Log}|1+t| - \frac{2}{1+t} - \operatorname{Log}(1+t^2) + C\\ &= 2\operatorname{Log}\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - \operatorname{Log}(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}) + C\\ &= \operatorname{Log}(1+\sin x) - \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + C.\end{aligned}$$

Remarque : Cette méthode conduit souvent à des calculs compliquées. Dans les cas particuliers suivants, on indique des changements de variable plus commodes :

a) $R(\cos x, \sin x)$ est une fonction impaire en x : faire $u = \cos x$;

b) $R(\cos x, \sin x)$ est une fonction paire en x : faire $u = \sin x$;

c) R est une fonction homogène de degré 0 : faire $u = \operatorname{tg} x$, lorsque $\operatorname{tg} x$ et $R(\cos x, \sin x)$ sont définies sur l'intervalle d'intégration.

Exemple : pour calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\,\mathrm{d}\,x}{1+\cos 2x}$, en faisant le changement de variable $u = \sin x$, on obtient :

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}\,u}{2(1-u^2)} = \frac{1}{4}\left[\operatorname{Log}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \operatorname{Log}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).$$

6.6.4. Intégrales abéliennes

6.6.4.1. Intégrale de la forme $\int R\left(x, \sqrt{Q(x)}\right)\mathrm{d}\,x$, où R est une fraction rationnelle et Q un polynôme de degré ≤ 2

a) Si $Q(x) = ax+b$ est un polynôme de degré 1, en faisant le changement de variable $t = \sqrt{ax+b}$, on se ramène à l'intégrale d'une fraction rationnelle.

b) Si $Q(x) = ax^2+2bx+c$ est un polynôme de degré 2, on distinguera deux cas :

• $a < 0$: $Q(x) = a(x + \frac{b}{a})^2 + c - \frac{b}{a^2}$ sera ≥ 0 si et seulement si

$$b^2 - ac > 0 \qquad \text{et} \qquad \left|x + \frac{b}{a}\right| \leq \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}}.$$

En faisant le changement de variable $x + \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}} \cos t$, on obtient : $\sqrt{Q(x)} = u(t) = \sqrt{\frac{ac - b^2}{a}} \sin t$ et on est ramené à une intégrale du type $\int R(\cos t, \sin t)\, \mathrm{d}t$.

• $a > 0$: en divisant au besoin $Q(x)$ par a, on peut supposer que $Q(x) = x^2+2bx+c$. En faisant le changement de variable $t = \sqrt{x^2 + 2bx + c} - x$, on obtient $\sqrt{Q(x)} = \frac{2bt - c - t^2}{2(b-t)}$, et on est ramené à l'intégrale d'une fraction rationnelle.

Remarque :

— Si $Q(x)$ à deux racines réelles a et b, on peut faire le changement de variable $t = \sqrt{\frac{x-b}{x-a}}$.

— Si $Q(x) = x^2-1$ (resp. $Q(x) = x^2+1$), on peut faire le changement de variable $x = \operatorname{ch} t$ (resp. $x = sh\, t$).

6.6.4.2. Intégrale de la forme $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$

En général, on fait le changement de variable $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ qui permet de se ramener à l'intégrale de fractions rationnelles.

6.7. Exercices et problèmes

1) Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x + 1}$

b) $\displaystyle\int \frac{3x\,\mathrm{d}x}{4x^2 + 3x + 1}$, $\qquad \displaystyle\int \frac{x^3}{x^4 + 2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{(x^2 + 1)^3}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2(x^2-1)^2(x^2+1)^4 - x}$, $\displaystyle\int x \,\mathrm{d}\,x$

2) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \,\mathrm{d}\,x}{3+2\cos x}, \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x, \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}\,\mathrm{d}\,x,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\,x}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}, \ (a \neq 0, b \neq 0),$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin^4 x + \cos^4 x}, \quad \int_0^{\pi} \cos^7 x \,\mathrm{d}\,x, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\,x}{3+\sin x},$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x + \cos x}, \quad \int_0^{\pi/4} \sin^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}\,x.$$

3) Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{3x^2+4x+2}}, \quad \int \frac{4x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2-3x+1}},$$

$$\int \frac{x^2-5}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}\,x, \quad \int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+2)+\sqrt{x-1}}, \quad \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x+\sqrt{4x^2+3x+1}},$$

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}\,x, \quad \int \frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)+\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{\mathrm{d}\,x}{(a^2+x^2)x^2},$$

$$\int \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}\,x, \quad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2}, \quad \int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}\,x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2+4x-4}}, \quad \int \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

4) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^4 \frac{\mathrm{Log}(x+2)}{x+1}\,\mathrm{d}\,x, \quad \int_1^2 x^5 \,\mathrm{Log}\, x \,\mathrm{d}\,x, \quad \int_2^3 \frac{(\mathrm{Log}\, x)^3}{x^2}\,\mathrm{d}\,x,$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{Log}\, x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x, \quad \int_0^{\pi/4} \mathrm{Log}(1+\mathrm{tg}\, x)\,\mathrm{d}\,x, \quad \int_0^5 x^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}\,x,$$

$$\int_1^3 x^5 (\mathrm{Log}\, x)^2 \,\mathrm{d}\,x$$

5) Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x \,\mathrm{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x, \quad \int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}\, x}+1}{\cos^2 x}, \quad \int \frac{x-\mathrm{Arctg}\, x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

6) Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

7) Soit f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. On pose

$$r(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que si f est croissante, on a :

$$0 \leq r(n) \leq \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right).$$

b) Montrer que si f est de classe C^1, alors

$$\lim_{n \to +\infty} nr(n) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right).$$

Indication : en posant $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, remarquer qu'on a

$$r(n) = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x^{k+1}} \left(f(x_{k+1}) - f(t)\right)\mathrm{d}t.$$

8) Soit f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

9) Soit f : $[0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante et telle que $f(0) = 0$; soit g: $[0, f(a)] \to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.

a) Montrer que, pour $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq f(a)$, on a : $xy \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y g(u)\,\mathrm{d}u$, l'inégalité ayant lieu si $y = f(x)$.

Indication : y étant fixé, étudier les variations de la fonction $x \to xy - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire, p et q étant des entiers positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, que : $xy \leq ax^p + by^q$, pour $a > 0, b > 0$ et $(pa)^q(qb)^p \geq 1$.

10) Montrer que la fonction définie par $f(0) = 0$, et $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ si $0 < x \leq 1$ est dérivable sur $[0, 1]$; sa dérivée f' est-elle intégrable sur $[0, 1]$?

11) Soit f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On suppose que pour toute fonction continue h : $[a, b] \to \mathbb{R}$, $\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

12) Soit f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\, e^{int}\, dt = 0.$$

Indication : On démontrera le résultat d'abord lorsque f est une fonction constante, puis lorsque f est une fonction en escalier, avant de le généraliser aux fonctions réglées.

13) En utilisant des inégalités ou la formule de la moyenne, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{t}}\, dt, \quad \lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\, dt, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+\sin x)^n\, dx.$$

14) (Inégalités de Schwartz et de Minkowski) Soient f et g deux fonctions numériques définies et continues sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$1)\ \left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right)^2 \le \left(\int_a^b (f(x))^2\, dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\, dx\right).$$

$$2)\ \left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\, dx\right)^{1/2} \le \left(\int_a^b (f(x))^2\, dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b (g(x))^2\, dx\right)^{1/2}.$$

15) Soit $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et soit $u(x) = \dfrac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Montrer que : $\forall t \in [a, b]$,

$$\int_a^t u(x) f^{(n)}(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[u^{(k)}(x) f^{(n-k-1)}(x)\right]_a^t ;$$

en déduire la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k} f^{(k)}(a) + \int_a^t (t-x)^{\frac{n-1}{(n-1)!}} f^{(n)}(x)\, dx.$$

Problème I — L'objet de ce problème est de démontrer le résultat suivant (formule de Stirling) : pour tout entier positif n assez grand : $n! \approx n^n \sqrt{2\pi n}\, e^{-n}$.

1) Soient :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x} - x$$

$$\Psi(x) = \varphi(x) - \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

En étudiant les dérivées de ces deux fonctions. montrer que : $\varphi(x) > 0$ et $\Psi(x) < 0$ pour $0 < x < 1$.

2) Montrer que pour tout $0 \leq x < 1$ on a :

$$0 \leq \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x} - x \leq \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

En posant $x = \dfrac{1}{2n+1}$, en conclure que :

$$0 \leq (n + \frac{1}{2}) \operatorname{Log} \frac{n+1}{n} - 1 \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

3) Soient les deux suites de terme général :

$a_n = n^{\frac{n+\frac{1}{2}\, e^n}{n!}}$ et $b_n = a_n \, e^{\frac{1}{12n}}$.

Montrer que $a_n \leq b_n$ et que $\dfrac{a_n + 1}{a_n} \geq 1$ et $\dfrac{b_n + 1}{b_n} \leq 1$.

En déduire qu'il existe un nombre unique c tel que : $a_n \leq c \leq b_n$ et qu'il existe un nombre θ compris entre 0 et 1 tel que :

$$n! = c^{-1} n^{n+\frac{1}{2}} \, e^{-n} \, e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

4) Montrer la formule de récurrence suivante :

$$\int \sin^n x \, \mathrm{d}\, x = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}\, x.$$

En déduire que :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, \mathrm{d}\, x = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} \mathrm{d}\, x = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3}.$$

En conclure que :

$$1 \leq \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \mathrm{d}\, x}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} \mathrm{d}\, x} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{2^2}{3^2} \frac{4^2}{5^2} \cdots \frac{(2n-2)^2}{(2n-1)^2} 2n \end{aligned}$$

et par suite :

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\, n^{\frac{1}{2}}}.$$

5) Montrer que le nombre c défini en 3) vérifie :

$$c = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!} \mathrm{e}^{-2n}$$

$$c = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}\sqrt{2}}{(2n)!\, n^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{n}}{n!}\right]^2$$

$$= \sqrt{2\pi} c^2$$

d'où la valeur de c et la formule de Stirling.

Problème II — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie la propriété : il existe $k > 0$ tel que

$$\forall (x, y), (x', y') \in \Omega, \qquad |f(x, y) - f(x', y')| \leq k|y' - y|.$$

Soit $(a, b) \in \Omega$ et $I = \{(x, y) : |x - a| \leq \alpha, |y - b| < \beta\} \subset \Omega$. Soit M tel que $|f(x, y)| \leq M$, $\forall (x, y) \in I$. On suppose $M\alpha \leq \beta$.

1)

a — Soit $J = [a - \alpha, a + \alpha]$. Montrer qu'on définit bien une suite de fonctions sur J en posant : $\varphi_0(x) = b$, $\varphi_n(x) = b + \displaystyle\int_a^x f(t, \varphi_{n-1}(t))\, \mathrm{d}t$, $\forall x \in J$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (On montrera que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in J$, $|\varphi_n(x) - b| < \beta$).

b — Montrer que : $|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \dfrac{Mk^{n-1}}{(n-1)!}|x - a|^{n-1}$, $\forall x \in J$.

2)

a — Montrer que φ_n est continue, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b — Montrer que la suite (φ_n) converge uniformément vers une fonction que l'on notera φ.

c — Montrer que φ est continue et vérifie les relations : $\varphi(a) = b$ et $\varphi(x) = b + \displaystyle\int_a^x f(t, \varphi(t))\, \mathrm{d}t$, $\quad \forall x \in J$.

d — En déduire que φ est dérivable sur J et vérifie l'égalité : $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $\quad \forall x \in J$.

3)

a — Soit $\Psi : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui vérifie les relations : $\Psi(a) = b$ et $\Psi'(x) = f(x, \Psi(x))$, $\quad \forall x \in J$.

Montrer que : $\Psi(x) = b + \displaystyle\int_a^x f(t, \Psi(t))\, \mathrm{d}t$, $\quad \forall x \in J$.

b — Montrer que :

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x) - \Psi(x)| &\leq k \int_a^x |\varphi(t) - \Psi(t)| \,\mathrm{d}\,t. \qquad \forall x \in J \\
&\leq A \frac{k^n}{n!} |x-a|^n. \qquad \text{où} \quad A = \sup_{x \in J} |\varphi(x) - \Psi(x)| .
\end{aligned}
$$

c — En déduire que $\varphi = \Psi$.

Chapitre 7 : FONCTIONS VECTORIELLES

7.1. Rappels

7.1.1. Produit mixte, produit vectoriel

On suppose que $\mathbb{R}^3$ est muni d'un produit scalaire et d'une orientation. On peut alors trouver des bases orthonormés directes de $\mathbb{R}^3$ (voir Cours d'Algèbre).

DÉFINITION

1) Soit $\overrightarrow{V}_1$, $\overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{V}_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On appelle produit mixte de ces trois vecteurs et on note $(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3)$ le déterminant dans une même base orthonormée de ces trois vecteurs :

$$\boxed{\begin{array}{l} (\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3) = \text{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3) \\ (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) \text{ base orthonormée directe} \end{array}}$$

2) Si $\overrightarrow{V}_\alpha = x_\alpha \vec{\imath} + y_\alpha \vec{\jmath} + z_\alpha \vec{k}$, pour $\alpha = 1, 2, 3$,
alors

$$(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3) &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{W} \text{ (produit scalaire)} \end{aligned}$$

où

$$\overrightarrow{W} = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

On établit facilement que $\overrightarrow{W}$ est indépendant du choix de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. $\overrightarrow{W}$ ne dépend donc que de $\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3$, du produit scalaire, et de l'orientation.

DÉFINITION

Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{V}_3$, on appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{V}_3$, et on note $\overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{V}_3$, le vecteur tel que :

$$\forall \overrightarrow{V}_1 \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{V}_1 \cdot \left(\overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{V}_3\right) = \left(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3\right)$$

7.1.2. Remarques

i) Dans toute base orthonormée directe, les composantes de $\overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{V}_3$ sont données en fonction de celles de $\overrightarrow{V}_2(x_2, y_2, z_2)$ et de $\overrightarrow{V}_3(x_3, y_3, z_3)$ par :

$$\overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{V}_3 = (y_2 z_3 - z_2 y_3, z_2 x_3 - x_2 z_3, x_2 y_3 - y_2 x_3)$$

ii) $\overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{V}_3$ est orthogonal à $\overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{V}_3$.

iii) $\left(\overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3, \overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{V}_3\right)$ est une base directe si $\overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{V}_3$ ne sont pas colinéaires.

iv) Le produit vectoriel définit une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, bilinéaire et antisymétrique.

Dans la suite $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si un élément $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$, on le notera $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Dans ce chapitre le symbole $\|\ \|$ désigne la norme $\|\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

7.2. Définition - Exemples

7.2.1. Définition

On appelle *fonction vectorielle* toute application

$$\vec{f} : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \overrightarrow{f(t)} = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$$

où S est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Remarque : Si

$$\vec{f} : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \overrightarrow{f(t)} = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$$

est une fonction vectorielle, elle définit n fonctions numériques $f_1, \ldots, f_n$: de S dans $\mathbb{R}$. Ces fonctions, appelées fonctions composantes, déterminent complètement $\vec{f}$.

7.2.2. Exemples

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (e^t, e^{-t})$.

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

7.3. Limite, continuité et dérivabilité d'une fonction vectorielle

7.3.1. Limite

7.3.1.1. Définition

Soit $\vec{f} : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \sim S$. On dira que $\vec{f}$ admet comme limite $\vec{l}$ quand t tend vers t_0 en restant dans S, et on note $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{f(t)} = \vec{l}$, si et seulement si :

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in S}} |f_i(t) - l_i| = 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

7.3.1.2. Remarques

1) La définition 7.3.1.1 ramène la définition de la limite d'une fonction vectorielle à celle de fonctions numériques.

2) Si on note $\| \quad \|$ l'une des normes N_1, N_2, N_∞ définies sur $\mathbb{R}^n$ au 5.1.3.2, on a :

$$\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{f(t)} = \vec{l} \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to t_0} \left\| \overrightarrow{f(t)} - \vec{l} \right\| = 0$$

On rappelle que deux normes N et N' sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes s'il existe deux nombres a, b ($a > 0$ et $b > 0$) tels que

$$aN'(x) \leq N(x) \leq bN'(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

La relation (1) entraîne alors:

$$\lim_{t\to t_0} N\left(\overrightarrow{f(t)} - \vec{l}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} N'\left(\vec{f}(t) - \vec{l}\right) = 0$$

4) Soit $(\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \dots, \vec{e'_n})$ une base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'application

$$N'_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \to N'_2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} |x'_i|$$

où les x'_i sont les composantes de $\vec{x}$ dans la base $(\vec{e'_i})$, définit une norme de $\mathbb{R}^n$, équivalentes à N_2 $(N_2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|)$ d'après les relations

$$\vec{e'_i} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\vec{e'_j}; \qquad x'_j = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}x_i$$

(A_{ji}) étant la matrice inversible, de changement de base. Donc, d'après 3) : $\lim_{t\to t_0} N_2\left(\vec{f}(t) - \vec{l}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} N'_2\left(\vec{f}(t) - \vec{l}\right) = 0$ ou encore :

$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{l} \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} \tilde{f}_i(t) = \tilde{l}_i \qquad \forall i = 1, \dots, n$

les $\tilde{f}_i(t)$ et $\tilde{l}_i$ étant les composantes de $\vec{f}_i(t)$ et $\vec{l}$ dans la base $(\vec{e'_1}, \dots, \vec{e'_n})$.

D'où

7.3.1.3. Proposition

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{l} \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} \tilde{f}_i(t) = \tilde{l}_i, \ \forall i = 1, \dots, n$$

où les $\tilde{f}_i(t)$ et $\tilde{l}_i$ sont les composantes de $\vec{f}(t)$ et $\vec{l}$ dans une base $(\vec{e'_1}, \dots, \vec{e'_n})$ de $\mathbb{R}^n$.

7.3.1.4. Propriétés

Soient : $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \overrightarrow{f(t)}$ et $\vec{g} : I \mapsto \mathbb{R}^n, t \mapsto \overrightarrow{g(t)}$ deux applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \sim I$.

Si $\lim_{t\to t_0} \overrightarrow{f(t)} = \vec{l}$ et $\lim_{t\to t_0} \overrightarrow{g(t)} = \vec{m}$, alors :

i) $\forall \lambda, \rho \in \mathbb{R}, \lim_{t\to t_0} \lambda\overrightarrow{f(t)} + \rho\overrightarrow{g(t)} = \lambda\vec{l} + \rho\vec{m}$;

ii) $\lim_{t\to t_0} ||\overrightarrow{f(t)}|| = ||\vec{l}||$;

iii) Si $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire, on a $\lim_{t\to t_0} \overrightarrow{f(t)} \cdot \overrightarrow{g(t)} = \vec{l} \cdot \vec{m}$;

iv) Si $\mathbb{R}^3$ est orienté et muni d'un produit scalaire, on a $\lim\limits_{t\to t_0} \overrightarrow{f(t)} \wedge \overrightarrow{g(t)} = \vec{l} \wedge \vec{m}$.

Démonstration — On démontre aisément i) en utilisant les propriétés des limites des fonctions numériques et la proposition 7.3.1.3.

ii) Si $\lim\limits_{t\to t_0} \overrightarrow{f(t)} = \vec{l}$, alors $\lim\limits_{t\to t_0} ||\overrightarrow{f(t)}|| = ||\vec{l}||$

car $0 \leq \ ||\overrightarrow{f(t)} - \vec{l}|| \leq ||\overrightarrow{f(t)} - \vec{l}||$.

iii) Soit $W = (\overrightarrow{W_1}, \dots, \overrightarrow{W_n})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ par rapport au produit sacalaire et soient $(f_i(t))_{1\leq i\leq n}$, $(g_i(t))_{1\leq i\leq n}$, $(l_i)_{1\leq i\leq n}$, $(m_i)_{i\leq l\leq n}$, les composantes respectives de $\vec{f}$, $\vec{g}$, $\vec{l}$ et $\vec{m}$ dans cette base. D'après 7.3.1.3,

$$\lim_{t\to t_0} \overrightarrow{f(t)} = \vec{l} \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} f_i(t) = l_i$$

$$\lim_{t\to t_0} \overrightarrow{g(t)} = \vec{m} \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} g_i(t) = m_i$$

Donc
$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} \overrightarrow{f(t)} \cdot \overrightarrow{g(t)} &= \lim_{t\to t_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)g_i(t)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \lim_{t\to t_0} f_i(t)g_i(t)\\ &= \sum_{i=1}^{n} l_i m_i = \vec{l} \cdot \vec{m}\end{aligned}$$

Pour démontrer iv, il suffit d'expliciter $\overrightarrow{f(t)} \wedge \overrightarrow{g(t)}$ et $\vec{l} \wedge \vec{m}$ dans une base orthonormée directe.

7.3.2. Continuité

7.3.2.1. Définition

Soit : $\vec{f} : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ et $t_0 \in S$. On dira que $\vec{f}$ est continue en t_0, si et seulement si : $\lim\limits_{t\to t_0} \overrightarrow{f(t)} = \overrightarrow{f(t_0)}$

7.3.2.2. Proposition

Soit : $\vec{f} : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))$. Soit $t_0 \in S$. f est continue en t_0 si et seulement si chacune des fonctions f_i, $i = 1, \dots, n$, est continue en t_0.

Démonstration — Elle découle immédiatement de la proposition 7.3.1.3.

De 7.3.2.4 on déduit :

7.3.2.3. Proposition

Soient : $\vec{f} : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\vec{g} : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ deux applications et $t_0 \in S$. Si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont continues en t_0 alors $\lambda\vec{f} + \mu\vec{g} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, $\|\vec{f}\|$, $\vec{f} \cdot \vec{g}$ sont continues en t_0. Si $n = 3$, $\vec{f} \wedge \vec{g}$ est aussi continue en t_0.

7.3.3. Dérivabilité

7.3.3.1. Définition

$\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, une application $\mathbb{R}$ et $t_0 \in \overset{\circ}{I}$. Soit la fonction :

$$\begin{aligned} \vec{\varphi} : I - \{t_0\} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\to \frac{\overrightarrow{f(t)} - \overrightarrow{f(t_0)}}{t - t_0} \end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{\varphi(t)}$ admet une limite $\vec{A}$, quand t tend vers t_0, on dira que $\vec{f}$ est dérivable en t_0, de dérivée $\vec{A}$, notée

$$\vec{A} = \overrightarrow{f'(t_0)}$$

7.3.3.2. Remarques

1) Comme pour les fonctions numériques on déduit aisément de la définition que $\vec{f}$ est dérivable en t_0, si et seulement si :

$$\boxed{\exists \vec{A} \in \mathbb{R}^n, \text{ tel que } \overrightarrow{f(t)} = \overrightarrow{f(t_0)} + (t - t_0)\vec{A} + (t - t_0)\vec{\varepsilon}(t, t_0)}$$

avec $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{\varepsilon}(t, t_0) = \vec{0}$. $\vec{A}$ est alors la dérivée de $\vec{f}$ en t_0.

2) Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $t_0 \in \overset{\circ}{I}$. $\vec{f}$ est dérivable en t_0 si et seulement si ses composantes $\tilde{f}_k$ dans une base quelconque $(\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \ldots, \vec{e'_n})$ sont dérivables en t_0, et on a alors

$$\boxed{\vec{f'}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}'_k(t_0)\vec{e'}_k.}$$

Preuve — Il suffit de le vérifier dans la base canonique. La fonction

$$\overrightarrow{\varphi(t)} = \left(\frac{f_1(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \ldots, \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0}\right)$$

admet une limite $\vec{f'}(t_0) = (l_1, \ldots, l_n)$ quand t tend vers t_0 si, et seulement si :

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f_k(t) - f_k(t_0)}{t - t_0} = l_k, \ \forall k = 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

(2) signifie que, $\forall k = 1, \ldots, n$, f_k est dérivable en t_0 et qu'on a $\overrightarrow{f'}(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0)) = (l_1, \ldots, l_n)$.

7.3.3.3. Propriétés

1) Si $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ sont dérivables en t_0 alors $\lambda\overrightarrow{f} + \mu\overrightarrow{g}$ est dérivable en t_0 et on a :

$$\left(\lambda\overrightarrow{f} + \mu\overrightarrow{g}\right)'(t_0) = \lambda\overrightarrow{f'}(t_0) + \mu\overrightarrow{g'}(t_0)$$

2) Si $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire, $\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g} : t \mapsto \overrightarrow{f}(t) \cdot \overrightarrow{g}(t)$ et $\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g} : t \mapsto \overrightarrow{f}(t) \wedge \overrightarrow{g}(t)$ $(n = 3)$ sont dérivables en t_0 et on a :

$$\boxed{\begin{array}{l}(\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g})'(t_0) = \overrightarrow{f'}(t_0) \cdot \overrightarrow{g}(t_0) + \overrightarrow{f}(t_0) \cdot \overrightarrow{g'}(t_0) \\ (\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g})'(t_0) = \overrightarrow{f'}(t_0) \wedge \overrightarrow{g}(t_0) + \overrightarrow{f}(t_0) \wedge \overrightarrow{g'}(t_0)\end{array}}$$

ces propriétés sont aisément vérifiables dans une base orthonormée.

3) Si $\mathbb{R}^3$ est un espace euclidien orienté soient $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dérivables. Soit $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h}) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \det(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t), \overrightarrow{h}(t))$. D'après le 1-5,

$$\det\left(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t), \overrightarrow{h}(t)\right) = \overrightarrow{f}(t) \cdot \left(\overrightarrow{g}(t) \wedge \overrightarrow{h}(t)\right)$$

donc $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h})$ (produit mixte de $\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{h}$) est dérivable et on a :

$$\boxed{\begin{array}{l}(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h})'(t) = (\overrightarrow{f'}(t), \overrightarrow{g}(t), \overrightarrow{h}(t)) \\ \qquad +(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g'}(t), \overrightarrow{h}(t)) + (\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t), \overrightarrow{h'}(t))\end{array}}$$

4) Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis, valables pour les fonctions numériques, ne s'appliquent pas en général pour les fonctions vectorielles. En effet soit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^2(1-t), t(1-t))\end{aligned}$$

On a $\overrightarrow{f}(0) = \overrightarrow{f}(1) = \overrightarrow{0}$; $\overrightarrow{f}$ est dérivable sur $]0, 1[$ et pourtant il n'existe pas de $t_0 \in]0, 1[$, tel que $\overrightarrow{f'}(t_0) = \overrightarrow{0}$. En effet :

$$\overrightarrow{f'}(t) = (t(2-3t), (1-2t)).$$

7.4. Dérivées d'ordre supérieur Développements limités

7.4.1. Dérivées d'ordre supérieur

Soit $\overrightarrow{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, et soit $t_0 \in \overset{\circ}{I}$. Si $\overrightarrow{f}$ est dérivable dans un voisinage $V(t_0)$ de t_0, considérons la fonction

$$\overrightarrow{f'} : V(t_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \overrightarrow{f'}(t)$$

Si $\overrightarrow{f'}$ est dérivable en t_0, sa dérivée notée $\overrightarrow{f''}(t_0)$, s'appelle dérivée d'ordre 2 de f en t_0. De proche en proche on peut définir $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$. L'existence de $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ suppose que $\overrightarrow{f'}(t)$, $\overrightarrow{f''}(t), \ldots, \overrightarrow{f^{(p-1)}}(t)$ sont définies dans un voisinage de t_0.

On montre facilement que $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ existe si et seulement si les composantes $\tilde{f}_k$ de $\overrightarrow{f}$ dans une base $(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \ldots, \overrightarrow{e'_n})$ de $\mathbb{R}^n$ admettent des dérivées d'ordre p en t_0 et on a alors :

$$\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k^{(p)}(t_0)\overrightarrow{e'_k}.$$

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est dite de classe C^k sur l'intervalle I si $\overrightarrow{f^{(k)}}$ est définie et continue sur I. Ce qui entraîne que $f, f', \ldots, f^{(k-1)}$ sont définies et continues sur I.

7.4.2. Développements limités

Supposons que les composantes $\tilde{f}_k$ de $\overrightarrow{f}$ dans une base $(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \ldots, \overrightarrow{e'_n})$ admettent des développements limités à l'ordre p au voisinage de t_0. On peut écrire dans ce cas :

$$\tilde{f}_k(t_0 + h) = \tilde{p}_k(h) + h^p \varepsilon_k(h)$$

où $p_k(h)$ est un polynôme en h de degré $\leq p$ et $\lim_{h \to 0} \varepsilon_k(h) = 0$. Par suite on a :

$$\overrightarrow{f}(t_0 + h) = \overrightarrow{p}(h) + h^p \overrightarrow{\varepsilon}(h) \tag{1}$$

où $\overrightarrow{p}(h) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k(h)\overrightarrow{e'_k}$ est un polynôme en h à coefficients dans $\mathbb{R}^n$ de degré $\leq p$, et $\vec{\varepsilon}(h) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(h)\overrightarrow{e'_k}$ vérifie $\lim_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \overrightarrow{0}$.

La formule (1) constitue un développement limité de $\overrightarrow{f}$ à l'ordre p au voisinage de t_0. Si les développements limités des f_k sont obtenus à partir de la formule de Taylor, on a :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{f}(t_0+h) = \overrightarrow{f}(t_0) + h\overrightarrow{f'}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{f''}(t_0) + \cdots \\ + \frac{h^p}{p!}\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0) + h^p\vec{\varepsilon}(h) \\ \text{avec } \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \overrightarrow{0}\end{aligned}}$$

7.4.3. Application à la Physique

$\mathbb{R}^3$ étant muni d'un produit scalaire, on considère l'espace affine euclidien associé $\mathscr{A}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $\overrightarrow{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe C^1. À $t \in I$, on associe le point $M(t)$ de $\mathscr{A}^3$ tel que $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{f}(t)$.

L'ensemble $\Gamma = \{M(t),\ t \in I\}$ peut être interprété comme la trajectoire du mouvement d'une particule de $\mathscr{A}^3$.

La vitesse de cette particule p au temps t_0 est donnée par le vecteur $\overrightarrow{f'}(t_0) \in \mathbb{R}^3$ et la direction de son mouvement au temps t_0 est donnée par la tangente T_0 au point $M_0 = M(t_0)$ définie par :

$$M \in T_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{f'}(t_0)(t - t_0).$$

Si p a une masse m, l'énergie cinétique $E(t)$ de la particule au temps t est définie par : $E(t) = \frac{1}{2}m(\overrightarrow{f'}(t) \cdot \overrightarrow{f'}(t))$; si $\overrightarrow{f''}$ existe, alors

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = m(\overrightarrow{f'}(t) \cdot \overrightarrow{f''}(t)).$$

Par conséquent, l'énergie cinétique de cette particule est constante si, à chaque instant t, le vecteur accélération $\overrightarrow{f''}(t)$ est perpendiculaire au vecteur vitesse $\overrightarrow{f'}(t)$.

Si la particule p est soumise à une force $\overrightarrow{F}(t)$, d'après la loi de Newton on a :

$$\overrightarrow{F}(t) = m\overrightarrow{f''}(t).$$

Par suite l'énergie cinétique est constante si et seulement $\overrightarrow{F}(t)$ est orthogonale à la direction du mouvement de la particule. On va illustrer ce qui précède par un exemple précis : la fonction vectorielle

$$\overrightarrow{f}(t) = (\cos t, \sin t, t)(t \in \mathbb{R})$$

définit une hélice circulaire de $\mathscr{A}^3$ d'axe $(O, \vec{k})$. On a :

$$\vec{f'}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\vec{f''}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$E(t) = \dfrac{1}{2}m(\sin^2 t + \cos^2 t + 1) = m$ et donc $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$.

En d'autres termes : soit une particule p soumise à une force $\vec{F}(t) = m(-\cos t, -\sin t, 0)$. Si pour $t = 0$, sa position initiale est le point $(1, 0, 0)(= \vec{f}(0))$ et sa vitesse initiale le vecteur $(0, 1, 1)(= \vec{f'}(0))$, alors la trajectoire de son mouvement est une hélice circulaire définie par la fonction $\vec{f}(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

7.5. Étude des courbes régulières de l'espace euclidien à 2 ou 3 dimensions

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un produit scalaire. $\mathscr{A}^3$ est l'espace affine euclidien associé d'origine O.

Définition — Un arc paramétré A de classe C^k de $\mathbb{R}^3$ est défini par le couple $(I, \vec{f})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\vec{f}$ est une application $t \mapsto \vec{f}(t)$ de classe C^k de I dans $\mathbb{R}^3$. L'ensemble $f(I)$ est le support de A.

Si on interprète le paramètre t comme étant le temps, l'arc A apparaît comme la trajectoire du point M de $\mathscr{A}^3$, notée $T(\vec{f})$, définie par $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(t)$.

La notion d'arc paramétré ne coïncide pas avec celle de courbe telle qu'on l'entend en géométrie élémentaire : il existe par exemple plusieurs représentations paramétriques ayant comme support une circonférence de $\mathscr{A}^3$. Pour arriver à une notion géométrique on doit convenir que certaines représentations paramétriques de même support définissent la même courbe.

7.5.1. Définition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Un difféomorphisme, de classe C^k de J sur I est une application bijective et de classe C^k de J sur I, dont la réciproque est aussi de classe C^k.

7.5.2. Définition

La représentation paramétrique $(J, \vec{g})$ est dite C^k-équivalente à $(I, \vec{f})$ s'il existe un difféomorphisme θ, de classe C^k, de J sur I tel que $\vec{g} = \vec{f} \circ \theta$.

7.5.3. Remarques

La relation $\mathscr{R}^k$: « $(J, \vec{g})$ est C^k-équivalente à $(I, \vec{f})$ » est symétrique et réflexive. La transitivité de $\mathscr{R}^k$ résulte du fait que l'application composée $\theta_1 \circ \theta_2$ de deux difféomorphismes θ_1 et θ_2 de classe C^k est encore un difféomorphisme de classe C^k. C'est donc une relation d'équivalence.

7.5.4. Définition

Soit $(I, \vec{f})$ un arc paramétré de classe C^k, sa classe d'équivalence $\overline{(I, \vec{f})}$ pour $\mathscr{R}^k$ définit un <u>arc géométrique</u> Γ de classe C^k. Les éléments de $\overline{(I, \vec{f})}$ sont les <u>représentations paramétriques admissibles</u> de Γ.

Tout élément $(J, \vec{g})$ de $\overline{(I, \vec{f})}$, tel que $\vec{g} = \vec{f} \circ \theta$ où θ est un difféomorphisme de classe C^k de J sur I, est appelé <u>changement de paramètre admissible</u>. Les propriétés <u>géométriques</u> de Γ sont, par définition, les propriétés du couple $(I, \vec{f})$ invariantes dans tout changement de paramètre admissible.

7.5.5. Orientation

Une application θ qui définit un changement de paramètre admissible étant un difféomorphisme, est toujours strictement monotone. Si dans la définition 7.5.2, on impose à θ d'être croissante, on obtient une relation d'équivalence $\mathscr{R}'^k$ plus restrictive que $\mathscr{R}^k$, dont chaque classe d'équivalence, modulo $\mathscr{R}'^k$, de représentations paramétriques de classe C^k, définit un <u>arc orienté</u> de classe C^k.

Ainsi, chaque représentation paramétrique $(I, \vec{f})$ de classe C^k détermine deux arcs orientés Γ^+ et Γ^-.

$$\Gamma^+ = \{(J, \vec{g}),\ \vec{g} = \vec{f} \circ \theta,\ \theta \text{ croissant}\}$$

$$\Gamma^- = \{(J, \vec{g}),\ \vec{g} = \vec{f} \circ \theta,\ \theta \text{ décroissant}\}$$

L'arc Γ^+, dont $(I, \vec{f})$ est une représentation paramétrique admissible, sera appelé arc orienté défini par $(I, \vec{f})$; et l'arc Γ^- sera dit orienté en sens contraire de Γ^+.

7.5.6. Définitions et remarques

1) Si $(I, \vec{f})$ et $(J, \vec{g})$ sont deux représentants du même arc orienté avec $\vec{g} = \vec{f} \circ \theta$, $\forall u, u' \in J$, $u < u' \Rightarrow t = \theta(u) < t' = \theta(u')$. On peut donc définir pour l'arc orienté une relation d'ordre sur les paramètres, ayant un caractère d'invariance pour tout changement de paramètre admissible conservant l'orientation.

On dit que l'arc géométrique est orienté à l'orientation de $(I, \vec{f})$ que l'on qualifie d'orientation dans le sens des t croissants.

2) Si $\vec{f}'(t) = \vec{0}$, le point $(t, \vec{f}(t))$ est dit singulier; cette définition est indépendante de la représentation paramétrique admissible considérée.

Un arc $(I, \vec{f})$ de classe C^k $(k \geq 1)$ est dit régulier si $\vec{f'}(t)$ ne s'annule pas sur I.

On ne considéra dans ce paragraphe que les arcs réguliers. On appellera invariant d'ordre k tout être géométrique de $(I, \vec{f})$ ne dépendant que de $\vec{f'}, \vec{f''}, \ldots, \overrightarrow{f^{(k)}}$, $(k \geq 1)$. On se propose dans la suite d'étudier les invariants d'ordre 1, 2 et 3 des courbes de $\mathscr{E}^3$.

3) Représentation normale — Soit (I, f) une représentation paramétrique d'un arc Γ de classe C^k, $k \geq 1$. Si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ on a :

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath} + f_3(t)\vec{k}$$
$$||\vec{f'}(t)|| = \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)}.$$

Choisissons un point A de la trajectoire $T(\vec{f})$ de $\vec{f}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{f}(t_0)$. La fonction $\Psi : t \mapsto ||\vec{f'}(t)||$ est continue sur I : il existe donc une fonction unique primitive s de Ψ sur I appelée abscisse curviligne comptée à partir de t_0 telle que $s(t_0) = 0$ et $s'(t) = ||\vec{f'}(t)||$; s est de classe C^k si $\vec{f}$ est de classe C^k. $s(I) = J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. $(I, \vec{f})$ étant régulier, $s'(t)$ est différent de zéro pour tout $t \in I$. Par suite s est inversible et la fonction φ réciproque de s est aussi de classe C^k.

Donc φ définit un changement de paramètre admissible, et $(J, f \circ \varphi)$ est une représentation paramétrique admissible appelée représentation normale de l'arc Γ.

En posant $\vec{g}(s) = \vec{f}(\varphi(s)), (s = s(t))$, on a $\vec{g'}(s) = \vec{f}'(\varphi(s))\,\varphi'(s)$ d'où $||\vec{g'}(s)|| = 1$. Un changement d'orientation de Γ change l'abscisse curviligne en son opposé (si l'origine ne change pas).

7.5.7. Invariants d'ordre 1 et 2 Courbure. Trièdre de Serret Frenet

7.5.7.1.

Soit $\Gamma = (I, \vec{f})$ un arc paramétré de classe C^1 régulier. Soient $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(u)$ et $\overrightarrow{OM_1} = \vec{f}(u+h)$. On a :

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{f}(u+h) - \vec{f}(u) = h\vec{f'}(u) + h\vec{\varepsilon}(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0} \quad (1)$$

La formule (1) conduit à définir la droite $(M, \overrightarrow{f'}(t))$ comme étant la tangente à l'arc Γ au point M. Le vecteur $\overrightarrow{f'}(t)$ est un vecteur directeur de la tangente. Sa direction reste invariante dans tout changement de paramètre admissible $t = \theta(u)$. Si on ne considère que des changements de paramètre conservant l'orientation, $\theta'(u)$ est positif et le sens du vecteur directeur de la tangente reste invariant. La demi-droite définie par le point M, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(t)$ et le vecteur $\overrightarrow{f'}(t)$ constitue la tangente à Γ orientée dans le sens des t croissants.

Soit Γ un arc régulier et orienté de classe C^1 de $\mathscr{A}^3$, défini par une représentation normale $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{g}(s)$. À chaque point M de Γ on associe le vecteur $\vec{t} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$. C'est un *vecteur unitaire* porté par la tangente orientée à Γ. Le plan perpendiculaire en M à la tangente est dit normal à Γ.

Courbure. La relation $\left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} \right\| = 1$ entraîne : $\vec{t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s^2} = 0$. Donc le vecteur $\vec{\gamma} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s^2} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}$ (vecteur accélération) est perpendiculaire à Γ. Si $\vec{\gamma} \neq 0$, sa direction est par définition celle de la *normale principale* en M à Γ. Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire de cette normale ayant même sens que $\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}$, on peut donc écrire :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = C\vec{n} = \frac{1}{R}\vec{n}, \quad \text{avec} \quad C > 0}$$

Le coefficient C est appelé la courbure et R le rayon de courbure en M à Γ. Le plan déterminé par $\vec{t}$ et $\vec{n}$ est le *plan osculateur* à Γ en M. La normale en M au plan osculateur est appelée *binormale*; sa direction est celle du vecteur $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$. Le plan déterminé par M et les vecteurs $\vec{b}$, $\vec{t}$ est appelé *plan rectifiant*.

Le trièdre orthonormé direct constitué par les vecteurs $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ est appelé *trièdre de Serret-Frenet* de Γ au point M.

Le plan osculateur est le plan de la courbe Γ si celle-ci est plane. Dans ce cas, le point I tel que $\overrightarrow{MI} = R\vec{n}$ est appelé centre de courbure en M à Γ.

7.5.7.2. Usage d'une représentation paramétrique quelconque

Si l'arc Γ est défini par une représentation paramétrique admissible quelconque $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(u)$, on a :

$$\overrightarrow{f'}(u) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{f}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = v\vec{t}. \tag{2}$$

En posant $v = \dfrac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,u}$, on obtient :

$$\overrightarrow{f''}(u) = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,u}\vec{t} + v\frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\,u}$$

or

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\,u} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\,s}\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,u} = \frac{v}{R}\vec{n}$$

d'où

$$\overrightarrow{f''}(u) = v'\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \qquad (3)$$

Si u désigne le temps, $\vec{f}(u)$ est « le vecteur position », $\overrightarrow{f'}(u)$ le vecteur vitesse, $\overrightarrow{f''}(u)$ le vecteur accélération, $v(u)$ la vitesse numérique, v' l'accélération tangentielle et $\dfrac{v^2}{R}$ l'accélération normale.

Les relations (2) et (3) entraînent :

$$\overrightarrow{f'}(u) \wedge \overrightarrow{f''}(u) = \frac{v^3}{R}\vec{t} \wedge \vec{n} = \frac{v^3}{R}\vec{b}$$

d'où

$$\boxed{R = \frac{|v^3|}{\left\|\overrightarrow{f'}(u) \wedge \overrightarrow{f''}(u)\right\|} = \frac{\|\overrightarrow{f'}(u)\|^3}{\left\|\overrightarrow{f'}(u) \wedge \overrightarrow{f''}(u)\right\|}} \qquad (4)$$

Le plan osculateur est déterminé par le point M, et les vecteurs $\overrightarrow{f'}(u)$ et $\overrightarrow{f''}(u)$. La condition pour qu'un point P appartienne à ce plan est :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{f'}(u), \overrightarrow{f''}(u)\right) = 0}$$

7.5.8. Invariants d'ordre 3 Torsion, formules de Frenet

Soit Γ un arc orienté de classe C^3 donné par une représentation normale $\overrightarrow{OM} = \vec{g}(s)$. En gardant les notations du 7.5.7, on voit alors que $\vec{b}$ est une fonction de classe C^1 de s et les relations : $\vec{b} \cdot \vec{b} = 1$, $\quad \vec{t} \cdot \vec{b} = 0$ entraînent par dérivation :

$$\vec{b} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\vec{b}}{\mathrm{d}\,s} = 0 \quad ; \qquad \vec{t} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\vec{b}}{\mathrm{d}\,s} + \vec{b} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\,s} = \vec{t} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\vec{b}}{\mathrm{d}\,s} = 0.$$

donc $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{b}}{\mathrm{d}\,s}$ est orthogonal à $\vec{t}$ et $\vec{b}$.

On posera $\dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s} = \tau\vec{n}$: le nombre τ est appelé <u>torsion de l'arc</u> Γ et $T = \dfrac{1}{\tau}$ porte le nom de <u>rayon de torsion</u>. Le repère $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ étant orthonormal, les relations $\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{n}}{R}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{n}}{T}$ entraînent :

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \vec{t}\,; \quad \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\vec{n}}{R}\,; \quad \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\vec{t}}{R} - \frac{\vec{b}}{T} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s} = \frac{\vec{n}}{T}\end{gathered}}$$

Ces formules sont appelées <u>formules de Serret-Frenet</u>.

Si l'arc Γ est défini par une représentation paramétrique admissible quelconque $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(u)$, on remarque que le nombre

$$\sigma = ||\vec{f'}(u)||^{-6}(\vec{f'}(u), \vec{f''}(u), \vec{f'''}(u))$$

reste invariant dans un changement de paramètre admissible, même si l'orientation de Γ n'est pas conservée. L'usage d'une représentation normale montre que $\sigma = -\dfrac{1}{R^2T}$.

d'où $$\boxed{\frac{1}{T} = -R^2\sigma = -\frac{(\vec{f'}(u), \vec{f''}(u), \vec{f'''}(u))}{\left\| \vec{f'}(u) \wedge \vec{f''}(u) \right\|^2}}$$

d'après la relation (4) de 7.5.7.2.

7.5.8.1. Remarque

On montre en utilisant les formules de Serret-Frenet qu'une courbe régulière de classe C^3 de $\mathscr{E}^3$ est définie, à un déplacement prés, par la donnée des fonctions $C(s)$ et $\tau(s)$ supposées continues $(C(s) = \dfrac{1}{R(s)})$.

Ce résultat se démontre aisément dans le cas d'une courbe plane (cas où $\tau = 0$) : si on prend le plan de la courbe pour plan $x0y$ et si on pose, $\widehat{0x, \vec{t}} = \varphi$, $\widehat{0x, \vec{n}} = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$, on a $\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \vec{n}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$. D'où $C(s) = \dfrac{1}{R(s)} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$ et la détermination de l'arc Γ se ramène aux 3 quadratures :

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{s_0}^{s} C(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad x = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\varphi(s)\,\mathrm{d}s, \quad y = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

Une courbe plane est donc déterminée à un déplacement près, par la donnée de la fonction continue $C(s)$.

7.6. Courbes paramétrées planes

Soient l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni d'un produit scalaire et orienté, et $\mathscr{A}^2$ l'espace affine euclidien associé, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $M : I \to \mathscr{A}^2$, $t \mapsto M(t)$ une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{A}^2$. Par définition :

$$\lim_{t \to t_0} M(t) = m \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{om}$$

$$M(t) \text{ est dérivable en } t_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(t) \text{ est dérivable en } t_0$$

la dérivée de $t \to M(t)$ est par définition $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}$. Il est facile de voir que ces définitions sont indépendantes de l'origine O choisie dans $\mathscr{A}^2$.

7.6.1. Définitions

Une courbe paramétrée de $\mathscr{A}^2$ est une application $M : I \to \mathscr{A}^2$, $t \mapsto M(t)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. L'image $\Gamma = M(S)$ est appelée courbe géométrique et on dit que M est un paramétrage de Γ.

L'objet de ce paragraphe est le « dessin » de Γ connaissant M. Les diverses techniques exposées ici permettent d'expliciter les propriétés essentielles de Γ, à l'aide du paramétrage M. Parmi les notions définies à l'aide de M, certaines, comme les notions de point régulier ou de point stationnaire, seront relatives à la courbe paramétrée M ; d'autres, comme les notions de point ordinaire, point d'inflexion, ou de point de rebroussement, sont relatives à la courbe géométrique Γ.

7.6.2. Étude locale

Soit $M : I \subset \mathbb{R} \to \mathscr{A}^2$ une courbe paramétrée plane et $\Gamma = M(I)$ la courbe géométrique associée. Soit $t_0 \in I$. On suppose que M est pourvue de dérivées de tous ordres en t_0. Pour étudier la forme de Γ au voisinage de $M_0 = M(t_0)$, on étudiera comment varie le vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ où $M_1 = M(t_0 + h)$, quand h varie dans un voisinage de t_0.

D'après l'hypothèse de dérivabilité faite sur $M(t)$ on peut écrire, en posant $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(t)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M_1} &= \vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0) \\ &= h\vec{f'}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\vec{f''}(t_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}(\overrightarrow{f^{(n)}}(t_0) + \vec{\varepsilon}(h)) \end{aligned} \qquad (1)$$

avec $\lim_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}$.

On définit un repère d'origine M_0, ayant pour vecteurs de base $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ est le premier vecteur dérivée de $\vec{f}(t)$ non nul en t_0, $\vec{v}$ le premier vecteur dérivée suivant qui ne soit ni nul ni colinéaire à $\vec{u}$. Soient X et Y les composantes de M_1 par rapport à ce repère.

1) Si $\overrightarrow{f'}(t_0) \neq 0$ et $\overrightarrow{f'}(t_0) \wedge \overrightarrow{f''}(t_0) \neq 0$, alors $\vec{u} = \overrightarrow{f'}(t_0)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{f''}(t_0)$. La relation (1) permet alors d'écrire :

$$\overrightarrow{MM_1} = h\overrightarrow{f'}(t_0) + \frac{h^2}{2!}(\overrightarrow{f''}(t_0) + \vec{\varepsilon}(h))$$

Au voisinage de t_0 on a : $X \sim h$ et $Y \sim \dfrac{h^2}{2}$: d'où la figure 7.1 ($X \sim h$: X équivalent à h (4.4.1)).

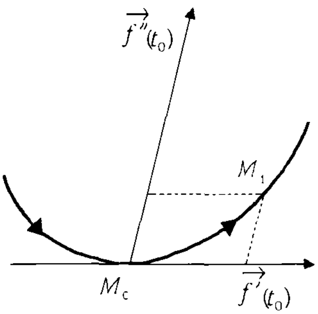


FIGURE: 7.1

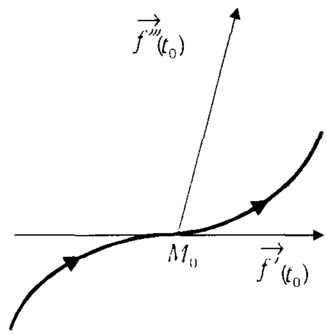


FIGURE: 7.2

$\overrightarrow{f''}(t_0)$ est dirigée vers la concavitée de la courbe Γ en M_0. M_0 est appelé *point ordinaire* de Γ

2) Si $\overrightarrow{f'}(t_0) \neq 0$, $\overrightarrow{f'}(t_0) \wedge \overrightarrow{f''}(t_0) = 0$, et $\overrightarrow{f'}(t_0) \wedge \overrightarrow{f'''}(t_0) \neq 0$, $\vec{u} = \overrightarrow{f'}(t_0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{f'''}(t_0)$: d'où :

$$\overrightarrow{M_0M_1} = h\overrightarrow{f'}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{f''}(t_0) + \frac{h^3}{3!}(\overrightarrow{f'''}(t_0) + \vec{\varepsilon}(h))$$

et l'on en déduit que : $X \sim h$, $Y \sim \dfrac{h^3}{3!}$ (quand $t \to t_0$) : d'où la figure 7.2. M_0 est appelé *point d'inflexion* de Γ.

3) Si $\overrightarrow{f'}(t_0) = 0$, le point M_0 est dit stationnaire.

— Si $\overrightarrow{f''}(t_0) \neq 0$, $\overrightarrow{M_0M_1} = \dfrac{h^2}{2!}(\overrightarrow{f''}(t_0) + \vec{\varepsilon}(h))$ montre que $\overrightarrow{f''}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente.

— Si $\overrightarrow{f''}(t_0) \wedge \overrightarrow{f'''}(t_0) \neq 0$, $\vec{u} = \overrightarrow{f''}(t_0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{f'''}(t_0)$: d'où

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{f''}(t_0) + \frac{h^3}{3!}(\overrightarrow{f'''}(t_0) + \vec{\varepsilon}(h)).$$

Cette relation montre que $X \sim \frac{h^2}{2}$, $Y \sim \frac{h^3}{3!}$ (quand $t \to t_0$) : d'où la figure 7.3.

M_0 est appelé un <u>*point de rebroussement de première espèce*</u>.

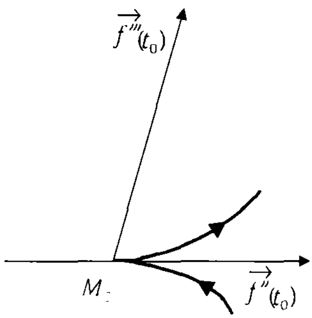


FIGURE: 7.3

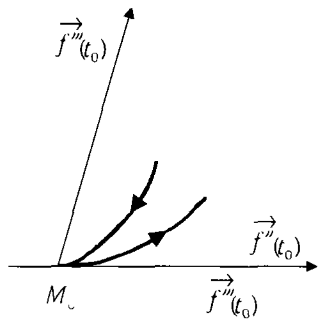


FIGURE: 7.4

— Si $\overrightarrow{f''}(t_0) \neq 0$, $\overrightarrow{f''}(t_0) \wedge \overrightarrow{f'''}(t_0) = 0$, $\overrightarrow{f''}(t_0) \wedge \overrightarrow{f^{(4)}}(t_0) \neq 0$ par un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus, on a la figure 7.4. M_0 est appelé un <u>*point de rebroussement de deuxième espèce*</u>.

4) Plus généralement soient $\vec{u} = \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{f^{(q)}}(t_0)$.

- Si p est impair > 1, q pair, on a la figure 7.1 en plus aplatie :
  M_0 est un méplat.
- Si p est impair, q impair, on a la figure 7.2 :
  M_0 est un point d'inflexion.
- Si p est pair, q impair, on a la figure 7.3 :
  M_0 est un point de rebroussement de première espèce.
- Si p est pair, q pair, on la figure 7.4 :
  M_0 est un point de rebroussement de seconde espèce.

7.6.3. Conseils pour la construction de Γ

1) On détermine tout d'abord un ensemble minimum (D) de valeurs de t, tel que t parcourant (D), le point $M(t)$ décrive entièrement Γ.

2) Par des considérations de périodicité, de translation, et de symétrie, on détermine, si possible, un sous-ensemble (d) de (D) tel que la courbe géométrique complète se déduise de la courbe géométrique partielle ($t \in (d)$) par des transformations géométriques simples.

3) L'ensemble (d) est en général formé de plusieurs intervalles dont chacun donne un arc continue de Γ. On étudie les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ $\left(\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}\right)$ aux extrémités des intervalles de (d). On peut avoir des branches infinies quand $t \to +\infty$, $t \to -\infty$, $t \to t_0^-$ ou $t \to t_0^+$.

L'étude étant la même, pour fixer les idées, on suppose que $t \to t_0^-$: trois cas peuvent se présenter :

- $x(t) \to x_0$ et $y(t) \to +\infty$ (ou $-\infty$) : la droite $x = x_0$ est asymptote.
- $x(t) \to +\infty$ (ou $-\infty$) $y(t) \to y_0$: la droite $y = y_0$ est asymptote.
- $x(t) \to +\infty$ (ou $-\infty$) et $y(t) \to +\infty$ (ou $-\infty$) : on étudie la limite

du rapport $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ quand $t \to t_0^-$. Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to a \in \mathbb{R}$, on forme $y(t)-ax(t)$: si $\lim\limits_{t\to t_0}(y(t)-ax(t)) = b$, alors $y = ax+b$ est l'équation d'une asymptote à la courbe. En général on obtient souvent a et b à l'aide des développements limités de $x(t)$ et $y(t)$.

Remarques

1) Si $a = +\infty$, ou bien si $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la courbe Γ admet une branche parabolique.

2) Supposons que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- Si $y(t) - ax(t) - b > 0$ la courbe est au-dessus de l'asymptote.
- Si $y(t) - ax(t) - b < 0$ la courbe est au-dessous de l'asymptote.

3) On détermine le sens de variation de $x(t)$, $y(t)$, généralement en étudiant les signes de $x'(t)$ et $y'(t)$. On consigne les résultats obtenus dans un tableau dont les lignes sont relatives à t, $x'(t)$, $y'(t)$, $x(t)$, $y(t)$. Une ligne supplémentaire relative à $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ (pente de la tangente) est souvent utile.

4) On trace la courbe après avoir étudié les points remarquables : points stationnaires, points d'inflexion, points doubles (les points doubles s'obtiennent en résolvant le système $\begin{cases} x(t_1) &= x(t_2) \\ y(t_1) &= y(t_2) \end{cases}$).

En fait un point $P \in \Gamma$ est dit double si un mobile décrivant la trajectoire Γ passe en P à deux instants différents t_1 et t_2.

7.6.4. Exemples

1) On considère la courbe Γ représentée paramétriquement par :

$$x(t) = 2t + t^2\ , \quad y(t) = 2t - t^{-2}.$$

Montrer que Γ admet un point stationnaire A et indiquer la forme de Γ au voisinage de A.

Solution : $x'(t) = 2(1+t)$, $y'(t) = 2(1 + \dfrac{1}{t^3})$, $x'(-1) = y'(-1) = 0$ implique que le point $A(-1,-3)$ est stationnaire. En posant $\overrightarrow{f}(t) = (2t+t^2, 2t - \dfrac{1}{t^2})$ on a : $\overrightarrow{f''}(-1) = (2,-6)$ et $\overrightarrow{f'''}(-1) = (0,-24)$; $\overrightarrow{f''}(1) \wedge \overrightarrow{f'''}(-1) \neq 0$, donc A est un point de rebroussement de première espèce.

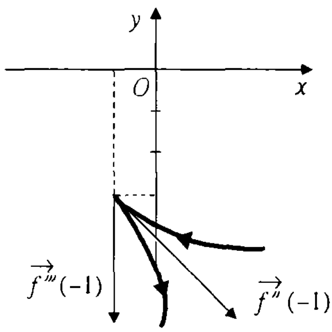


FIGURE: 7.5

2) Étudier la courbe Γ représentée paramétriquement par :

$$x(t) = \operatorname{tg} t\ , \quad y(t) = 2t - \operatorname{tg} t$$

i) Intervalle d'étude

• $D = \mathbb{R}$.

• $x(t+\pi) = x(t)$ et $y(t+\pi) = y(t) + 2\pi$ entraînent que Γ est invariante par la translation $T_{\overrightarrow{V}}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{V} = (0, 2\pi)$. On restreint l'étude de Γ à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et on translate par $T_{\overrightarrow{V}}$ la courbe partielle Γ_1 ainsi obtenue.

• $-x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Γ est invariante par la symétrie par rapport à O, donc Γ_1 aussi.

En définitive l'intervalle d'étude se réduit à $[O, \frac{\pi}{2}]$.

ii) branches infinies, asymptotes

$\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} x(t) = \lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} y(t) = +\infty.$

$\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -1$. $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} (y(t) + x(t)) = \pi$ donc $y = -x + \pi$ est asymptote à Γ et comme $y(t) + x(t) - \pi = 2t - \pi < 0$, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, la courbe est au-dessus de l'asymptote pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

iii) Tableau de variation

$x'(t) = 1 + \operatorname{tg}^2 t$, $y'(t) = 1 - \operatorname{tg}^2 t$ et $\dfrac{y'(0)}{x'(0)} = 1$, la courbe admet

comme tangente à l'origine la première bissectrice.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x'		$+$		$+$	
y'		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	$-\infty$

La construction de Γ est laissée en exercice.

7.7. Courbes en coordonnées polaires

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est toujours considéré ici muni d'un produit scalaire et orienté, et l'espace affine associé $\mathscr{A}^2$ rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Si une courbe Γ de $\mathscr{A}^2$ admet un paramétrage M de la forme

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = f(\theta)\cos\theta\vec{\imath} + f(\theta)\sin\theta\vec{\jmath}, \quad \theta \in S \subset \mathbb{R},$$

alors $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}(\theta)) = \theta$ modulo π. Le paramètre θ peut être interprété comme étant une mesure de l'angle orienté (Ox, OM). On dit alors que $\underline{\rho = f(\theta),\ \theta \in S}$, est l'<u>équation polaire de Γ</u>. Les courbes polaires sont donc un cas particulier des courbes paramétrées étudiées en 7.6, auxquelles on pourrait appliquer les méthodes générales du paragraphe précédent. Mais il paraît plus simple, pour l'étude de ces courbes, d'employer des techniques spécifiques, exposées succinctement ci-dessous :

7.7.1. Définition

Soit $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \theta \mapsto f(\theta)$. On dit qu'une courbe Γ de $\mathscr{A}^2$ admet l'<u>équation polaire</u> $\underline{\rho = f(\theta),\ \theta \in S}$ si et seulement si Γ est l'ensemble des points M de $\mathscr{A}^2$ tels que $\overrightarrow{OM} = f(\theta)\vec{u}(\theta)$ où $\theta \in S$, et $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$. Γ admet donc le paramétrage : $M : S \subset \mathbb{R} \to \mathscr{A}^2\ \theta \mapsto M(\theta)$, défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = f(\theta)\cos\theta\vec{\imath} + f(\theta)\sin\theta\vec{\jmath}, \text{ où } (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \theta \quad (\pi)}$$

Les couples (ρ, θ), $(\rho, \theta+2k\pi)$, $(-\rho, \theta+\pi)$ définissent le même point de $\mathscr{A}^2$. Si $\rho = f(\theta)$ est représentée par Γ, alors $\rho = -f(\theta+\pi)$ est représentée aussi par Γ. On supposera dans la suite que la courbe $M : \theta \to M(\theta)$ est régulière.

7.7.2. Remarques

1) On indique ci-dessous les équations en coordonnées polaires de quelques courbes simples :

Équations en coordonnées cartésiennes	Équations en coordonnées polaires
Droite passant par O	
$y = x \operatorname{tg} \alpha$	$\theta = \alpha + k\pi$
Droite quelconque	
$ax + by = c$	$\rho = \dfrac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$
Cercle de centre O et de rayon R	
$x^2 + y^2 = R^2$	$\rho = R$
Cercle passant par O	
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$	$\rho = \sqrt{2a\cos\theta + 2b\sin\theta}$

2) Si $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$,

$$\begin{aligned} \vec{u}'(\theta) &= -\sin\theta\vec{\jmath} + \cos\theta\vec{\imath} = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{\imath} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{\jmath} \\ &= \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Ainsi $(\vec{u}(\theta), \vec{u}'(\theta))$ est une base orthonormée directe. Le repère $(O\vec{u}(\theta), \vec{u}'(\theta))$ est appelé <u>repère mobile</u>. D'une façon générale on a :

$$\vec{u}^{(n)}(\theta) = \cos(\theta + n\frac{\pi}{2})\vec{\imath} + \sin(\theta + n\frac{\pi}{2})\vec{\jmath} \qquad (1)$$

7.7.3. Étude locale

On considère une courbe Γ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$, $\theta \in S$, où f est supposée de classe C^k pour k assez grand.

1) <u>Étude en un point différent de l'origine O.</u>

Soient OX, OY les axes ayant respectivement pour vecteurs unitaires $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{u}'(\theta)$.

On a : $\overrightarrow{OM}(\theta) = f(\theta)\vec{u}(\theta)$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}(\theta)}{\mathrm{d}\,\theta} = f'(\theta)\vec{u}(\theta) + f(\theta)\vec{u}'(\theta). \qquad (1)$$

Si $M(\theta_0) \neq 0$, alors $f(\theta_0) \neq 0$ et (1) montre que $\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\,\theta}(\theta_0)$ est un vecteur directeur de la tangente M_0T en M_0 à Γ.

Si on pose $V = (OX, M_0T)$ (angle de droites orienté), on a :

si $f'(\theta_0) \neq 0 \qquad \operatorname{tg} V = \dfrac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}$.

si $f'(\theta_0) = 0$, alors $V = \dfrac{\pi}{2}(\pi)$ et on peut étendre la formule ci-dessus en donnant un sens à l'écriture $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2} = \infty = \dfrac{f(\theta_0)}{0}$.

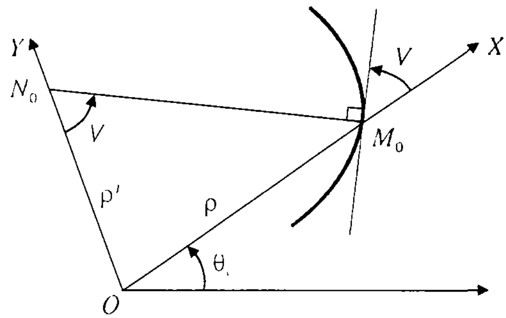


FIGURE: 7.6

Procédons à une étude analogue à 7.6.2. Posons

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = \overrightarrow{E}(\theta) = f(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$$

$$\begin{aligned}\text{On a} : \overrightarrow{E}'(\theta) &= f'(\theta)\overrightarrow{u} + f(\theta)\overrightarrow{u}' \\ \overrightarrow{E}''(\theta) &= f''(\theta)\overrightarrow{u} + 2f'(\theta)\overrightarrow{u}' + f(\theta)\overrightarrow{u} \\ &= (f''(\theta) - f(\theta))\overrightarrow{u} + 2f'(\theta)\overrightarrow{u}'\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{E}'(\theta) \wedge \overrightarrow{E}''(\theta) = [f(\theta)^2 + 2f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)]\vec{k} \qquad (\vec{k} = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath})}$$

Donc si $\overrightarrow{E}'(\theta) \wedge \overrightarrow{E}''(\theta) = (f(\theta)^2 + 2f'^2 - ff'')\vec{k} \neq \overrightarrow{0}$, le point $M(\theta)$ est un point ordinaire et si $f^2 + 2f'^2 - ff'' > 0$, la courbe tourne sa concavité vers O. ($\overrightarrow{E}''$ et $\overrightarrow{MO}$ sont d'un même côté de la tangente en M à Γ).

Si $\overrightarrow{E}'(\theta) \wedge \overrightarrow{E}''(\theta) = \overrightarrow{0}$, mais $\overrightarrow{E}'(\theta) \wedge \overrightarrow{E}'''(\theta) \neq \overrightarrow{0}$, alors le point $M(\theta)$ est soit un point ordinaire soit un point d'inflexion.

2) Étude au voisinage de l'origine.

On pose $\overrightarrow{E}(\theta) = \overrightarrow{OM}(\theta) = f(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$. On montre par récurrence, en utilisant la relation $C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p$, la formule suivante (formule de

Leibniz) :

$$\overrightarrow{E}^{(n)}(\theta) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(\theta)\overrightarrow{u}^{(k)}(\theta). \tag{1}$$

Soit θ_0 tel que $f(\theta_0) = 0$: on a $M(\theta_0) = O$.

Soit p le plus petit entier tel que $f^{(p)}(\theta_0) \neq 0$. d'après (1) on a :

$$\overrightarrow{E}^{(p)}(\theta_0) = f^{(p)}(\theta_0)\overrightarrow{u}(\theta_0)$$
$$\overrightarrow{E}^{(p+1)}(\theta_0) = f^{(p+1)}(\theta_0)\overrightarrow{u}(\theta_0) + (p+1)f^{(p)}(\theta_0)\overrightarrow{u}'(\theta_0)$$

par suite

$$\boxed{\overrightarrow{E}^{(p)}(\theta_0) \wedge \overrightarrow{E}^{(p+1)}(\theta_0) = \{(p+1)(f^{(p)}(\theta_0))^2\}\vec{k} \neq 0}$$

Donc d'après l'étude générale faite en 7.6.2 on peut énoncer :

- La courbe est tangente en O à $\overrightarrow{u}(\theta_0)$
- Si p est impair, O est un point ordinaire
- Si p est pair, O est un point de rebroussement de première espèce

7.7.4. Remarques et conseils à propos de la construction d'une courbe polaire $\Gamma : \rho = f(\theta)$.

1) On détermine tout d'abord un ensemble minimum (D) de valeurs de θ, tel que θ parcourant (D), le point $M(\theta)$ parcourt toute la courbe Γ.

2) Si $\rho = f(\theta)$ admet une période T, on construit l'arc Γ' pour $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + T[\cap(D)$, la courbe complète s'obtient en faisant subir à Γ' des rotations autour de O et d'angle T.

3) Si $f(\alpha - \theta) = f(\theta)$, (Γ) admet la droite $\Delta : \theta = \dfrac{\alpha}{2} + k\pi$ comme axe de symétrie. Si Γ^+ désigne la partie de Γ pour laquelle $\theta \in (D)\cap[\alpha, +\infty[$, et si $\Gamma^- = S_\Delta(\Gamma^+)$, $S_\Delta$étant la symétrie par rapport à Δ, alors $\Gamma = \Gamma^- \cup \Gamma^+$.

4) Si, quand $\theta \to \alpha$, $f(\theta) \to +\infty$ (ou $-\infty$), $\theta = \alpha + k\pi$ définit une direction asymptotique OX. La branche infinie correspondante admet une asymptote D parallèle à OX si $y = f(\theta)\sin(\theta - \alpha)$ admet une limite L quand $\theta \to \alpha$. La droite $Y = L$ détermine alors cette asymptote : OA est appelée *sous-asymptote polaire* (Fig. 7.7).

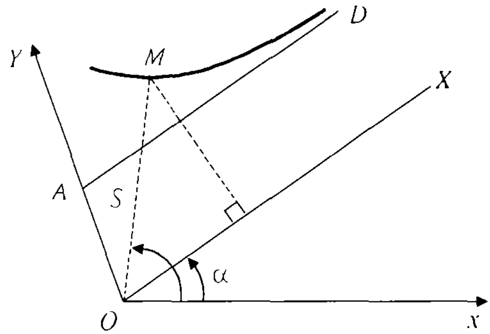
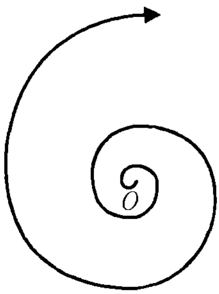


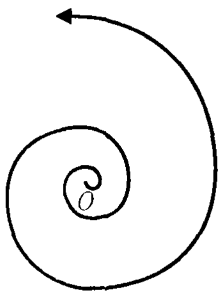
FIGURE: 7.7

5) Les spirales apparaissent pour $\theta \to -\infty$, ou $\theta \to +\infty$.



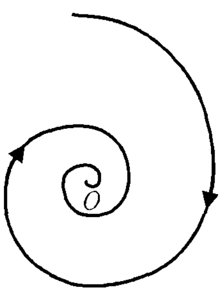
$f(\theta) \to +\infty$ (ou $-\infty$)
quand $\theta \to -\infty$

FIGURE: 7.8



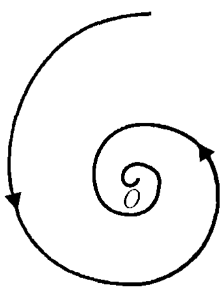
$f(\theta) \to +\infty$ (ou $-\infty$)
quand $\theta \to +\infty$.

FIGURE: 7.9



$f(\theta) \to 0$
quand $\theta \to -\infty$

FIGURE: 7.10



$f(\theta) \to 0$
quand $\theta \to +\infty$.

FIGURE: 7.11

i) Si $f(\theta) \to +\infty$ (ou $-\infty$), la spirale s'agrandit avec $\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|$ qui tend vers $+\infty$ (Fig.7.8,7.9).

ii) Si $f(\theta) \to 0$ la spirale « converge » vers l'origine (Fig.7.10,7.11).

iii) Si $f(\theta) \to a$ la spirale s'enroule autour d'un cercle de centre O et de rayon $|a|$, en restant à l'extérieur si

$$f(\theta) \to \begin{cases} a^+ & \text{où a>0} \\ a^- & \text{où a<0} \end{cases}$$

à l'intérieur si

$$f(\theta) \to \begin{cases} a^+ & \text{où a<0} \\ a^- & \text{où a>0} \end{cases}$$

6) On calcule f' et $\operatorname{tg} V = \dfrac{f}{f'}$. On étudie le sens de variation de f en dressant le tableau des variations.

7) Étude de points remarquables (point d'inflexion, point de rebroussement).

7.8. À RETENIR

1) $\mathbb{R}^n$ est normé. Soit $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. $\overrightarrow{f}$ est dérivable en $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ si et seulement si pour toute base $B = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$, les composantes f_k de $\overrightarrow{f}$ par rapport à B sont dérivables en t_0 et on a :

$$\boxed{\overrightarrow{f}'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_k'(t_0)\overrightarrow{e}_k}$$

Si $\overrightarrow{f}$ est de classe C^p $(p \geq 1)$ on a :

$$\boxed{\overrightarrow{f}(t_0+h) = \overrightarrow{f}(t_0) + h\overrightarrow{f}'(t_0) + \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{f}''(t_0) + \dots + \frac{h^p}{p!}(\overrightarrow{f}^{(p)}_{t_0} + \overrightarrow{\varepsilon}(h))}$$

avec $\quad \lim\limits_{h\to 0} \overrightarrow{\varepsilon}(h) = 0.$

2) $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel euclidien orienté et $\mathscr{A}^3$ l'espace affine associé à $\mathbb{R}^3$ d'origine O. Soient : $\overrightarrow{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\Gamma = \{M \in \mathscr{A}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(t),\ t \in I\}$ la trajectoire de $\overrightarrow{f}$, et s l'abscisse curviligne.

2.1) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \vec{t}$ est le vecteur unitaire de la tangente orientée en M à Γ

2.2) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{n}}{R}$. $\vec{n}$ est le vecteur unitaire de la normale et $R > 0$ le rayon de courbure en M à Γ

2.3) $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$. $\vec{b}$ est le vecteur unitaire de la binormale en M à Γ. $(M, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ est un repère orthonormé direct appelé repère de Serret-Frenet de Γ en M

2.4) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{n}}{T}$. T est le rayon de torsion en M à Γ

2.5) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\vec{t}}{R} - \dfrac{\vec{b}}{T}$

3) E^2 est un espace vectoriel euclidien orienté, et $\mathscr{A}^2$ le plan affine associé d'origine O.

3.1) Soit $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(t)$, et Γ la trajectoire de M. Soit $\overrightarrow{f^{(p)}}(t)$ le premier vecteur dérivé non nul ($p \geq 1$) et $\overrightarrow{f^{(q)}}(t)$ le premier vecteur dérivé suivant non nul et non colinéaire à $\overrightarrow{f^{(p)}}(t)$.

On a :

si p est impair et q pair, $M(t)$ est un point ordinaire

si p est impair et q impair, $M(t)$ est un point d'inflexion

si p est pair, M est un point de rebroussement de première espèce si q est impair, de deuxième espèce si q est pair

3.2) Soit $\overrightarrow{OM} = f(\theta)\vec{u}(\theta)$, $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$

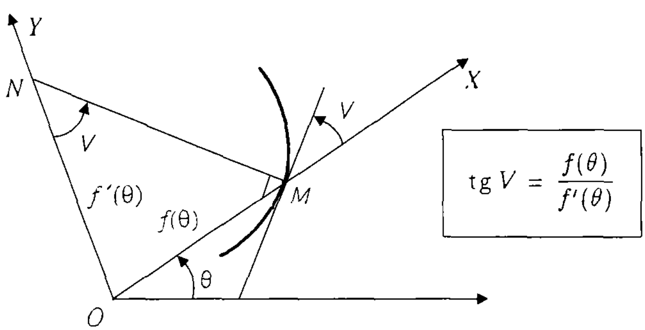


FIGURE: 7.12

Si $\lim\limits_{\theta \to \alpha} |f(\theta)| = +\infty$, alors : $\overline{OA} = \lim\limits_{\theta \to \alpha} f(\theta)\sin(\theta - \alpha)$ est la sous-asymptote polaire.

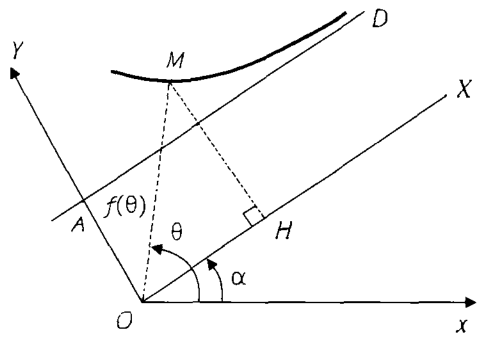


FIGURE: 7.13

7.9. Exercices et problèmes

1) Déterminer le rayon de courbure au point correspondant à $\theta = 0$ de la courbe d'équation polaire $\rho = 1 + 2\cos\dfrac{\theta}{2}$.

2) Déterminer les courbes tel que $R = a\sin\alpha$. (R = rayon de courbure ; $\alpha = (\vec{\imath}, \vec{t})$.

3) On considère l'arc paramétré Γ :

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi, \quad a > 0.$$

Γ étant orienté d'une façon quelconque, on appelle $(M, \vec{t}, \vec{n})$ le repère de Frenet en M et P le point défini par $\overrightarrow{MP} = -R\vec{n}$ (R = rayon de courbure au point M). Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}$ des points P admet pour représentation paramétrique :

$$x(t) = a(t - 3\sin t), \quad y(t) = 3a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

construire $\mathscr{C}$.

4) Γ étant l'hyperbole équilatère d'équation $x \cdot y = a^2$ dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé, la normale en un point M de Γ recoupe Γ en N.

Montrer que le point C défini par $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{CM}$ est le centre de courbure de Γ en M.

5) Déterminer une droite qui soit à la fois tangente et normale à l'arc paramétré Γ :

$$x(t) = 3t^2 \quad , \quad y(t) = 2t^3 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

6) Déterminer le trièdre de Frenet, la courbure et la torsion en un point $M(t)$ de l'arc :

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin^2 t \quad , \qquad y(t) = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \quad , \qquad z(t) = \sin t.$$

7) Construire la courbe Γ d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{4}}$. Déterminer le point double A.

Soit M un point quelconque de Γ d'angle polaire θ, D la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{4}$, et P l'intersection de AM et de D. Montrer que le lieu géométrique de P quand M décrit Γ est un cercle dont on donnera les éléments caractéristiques.

8) Montrer que pour la courbe :

$$x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t,\ z = at$$

les axes du trièdre de Frenet forment des angles constants avec l'axe des x.

9) Déterminer la courbure et la torsion de la courbe Γ

$$x = a \operatorname{ch} t \cos t,\ y = a \operatorname{ch} t \sin t,\ z = at$$

Par un point $P \in \Gamma$, on considère une normale qui coupe l'axe des z en un point Q. Montrer que la longueur du segment PQ est égale au rayon de torsion au point P.

10) Montrer que les formules de Serret-Frenet peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{V}(s) \wedge \vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{V}(s) \wedge \vec{n}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{V}(s) \wedge \vec{b}$$

et déterminer $\vec{V}(s)$.

11) Prouver qu'une courbe Γ est plane dans les deux cas suivants :

1) la torsion est identiquement nulle

2) tous les plans osculateurs passent par un point fixe.

12) Un point P décrit une trajectoire régulière définie par :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{f}(t) \quad \text{où } \vec{f}(t) \text{ de classe } C^2$$

i) On suppose que $\vec{f}(t) \wedge \vec{f'}(t) = \vec{0}$. Montrer que $\vec{f}(t)$ garde une direstion fixe.

ii) On suppose que $\left(\vec{f}(t), \vec{f'}(t), \vec{f''}(t)\right) = 0$ (produit mixte). Montrer que $\vec{f}(t) \wedge \vec{f'}(t)$ garde une direction invariante et que $\vec{f}(t)$ appartient à un plan fixe.

Chapitre 8 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Introduction

Une grande variété de problèmes relatifs à la mécanique, l'astronomie, la physique mathématique, etc., conduisent à déterminer une fonction, inconnue, par la connaissance d'une équation reliant ses dérivées successives jusqu'à un certain ordre. Ces équations sont appelées équations différentielles. Leur étude constitue l'une des branches des mathématiques les plus fécondes.

Par exemple, on voudrait déterminer le mouvement d'une particule, connaissant sa vitesse et son accélération. Une substance radioactive se désintègre à une certaine vitesse, et l'on voudrait déterminer la matière fissile restante au bout d'un certain temps.

En général, on a affaire à deux sortes d'équations différentielles : les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles suivant que la fonction à déterminer est d'une variable ou de plusieurs variables.

Un exemple simple d'une équation différentielle ordinaire est la relation

$$y' - y = 0 \tag{1}$$

qui est satisfaite par la fonction $f(x) = e^x$. On montrera que toute solution de (1) est de la forme $f(x) = Ce^x$, où C est une constante.

Une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

est un exemple d'une équation aux dérivées partielles. L'équation (2) appelée équation de Laplace apparaît en électricité, en magnétisme, en mécanique des fluides. Elle a plusieurs sortes de solutions

$$f(x,y) = x + 2y, \quad f(x,y) = e^x \cos y, \quad f(x,y) = \mathrm{Log}(x^2 + y^2).$$

Etant donnée une fonction F de $n+1$ variables, on appelle équation différentielle (ordinaire) d'ordre n, toute relation de la forme:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

entre la variable x, la fonction $y(x)$ et ses dérivées $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$.

L'équation (1) est dite linéaire homogène (resp. linéaire non homogène) si F est une fonction linéaire (resp. affine) en $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

On appelle solution ou intégrale de l'équation (1) une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle I telle que $F\left((x), f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\right) = 0$, $\forall x \in I$. Intégrer l'équation (1), c'est déterminer toutes ses solutions.

On dira que l'intégration de l'équation (1) a été ramenée à des quadratures si on a pu exprimer ses solutions au moyen d'intégrales de fonction connues.

L'étude des équations différentielles a débuté au XVII$^{\text{e}}$ siècle avec Newton, Leibniz et Bernoulli. On s'aperçoit alors progressivement qu'excepté très peu d'équations différentielles d'un certain type, il est pratiquement impossible de trouver une théorie mathématique générale permettant de résoudre les équations différentielles. Néanmoins on a établi des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle. Et l'on est ainsi amené à considérer les équations différentielles comme un moyen puissant de construction de fonctions nouvelles dont les propriétés sont étudiées à partir des équations différentielles elles-mêmes.

Parmi le peu d'équations qu'on peut résoudre, figurent les équations différentielles linéaires dont certains types sont étudiés dans ce chapitre.

8.1. Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on identifie le corps des nombres complexes à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ par la bijection

$$\begin{aligned} \theta\ &: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \\ z = x + \mathrm{i}\, y &\mapsto \theta(x) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \end{aligned}$$

Ainsi toute fonction

$$\begin{aligned} h\ &: S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ &\qquad t \mapsto h(t) = f(t) + \mathrm{i}\, g(t) \end{aligned}$$

peut être interprétée comme une fonction

$$\begin{aligned} \vec{H}\ &: S \to \mathbb{R}^2 \\ &\qquad t \mapsto f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath} \end{aligned}$$

Si S est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on sait (chapitre 7) que $\vec{H}$ est continue (resp. dérivable) en un point $t_0 \in S$ si et seulement si f et g sont continues (resp. dérivables) en t_0. Et $\vec{H}'(t_0) = f'(t_0)\vec{\imath} + g'(t_0)\vec{\jmath}$

Ceci nous amène à poser les définitions suivantes :

8.1.1. Définitions

Soit

$$\begin{aligned} h\ &: I \to \mathbb{C} \\ &t \mapsto f(t) + \mathrm{i}\, g(t) \end{aligned}$$

une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On dira que :

i) h admet une limite $l = l_1 + \mathrm{i}\, l_2$ en un point t_0, $I \sim t_0$, si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = l_1$ et $\lim\limits_{t \to t_0} g(t) = l_2$.

ii) h est continue en $t_0 \in I$ si et seulement $f : t \mapsto f(t)$ et $g : t \mapsto g(t)$ sont continues en t_0.

iii) h est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement les fonctions f et g sont dérivables en t_0, et la dérivée de h en t_0, notée $h'(t_0)$ est donnée par $h'(t_0) = f'(t_0) + \mathrm{i}\, g'(t_0)$.

8.1.2. L'exponentielle complexe

8.1.2.1. Définition

Soit $\alpha = a + \mathrm{i}\, b$ un nombre complexe fixé; $\exp \alpha x$, pour $x \in \mathbb{R}$, est le nombre complexe $\exp ax \exp \mathrm{i}\, bx$, où $\exp \mathrm{i}\, bx = \cos bx + \mathrm{i} \sin bx$ et $\exp ax = \mathrm{e}^{ax}$ a la signification habituelle.

On définit ainsi une application

$$\begin{aligned} \exp \alpha\ &: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ &x \mapsto \exp \alpha(x) = \exp \alpha x \end{aligned}$$

8.1.2.2. Propriétés

On déduit des définitions 8.2.1 que, si $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $\exp \alpha$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Un simple calcul montre que :

$$\boxed{\begin{array}{l} (\exp \alpha x)' = \alpha \exp \alpha x \quad \text{(donc } \exp \alpha x \text{ est indéfiniment dérivable)} \\ \exp \alpha x . \exp \beta x = \exp(\alpha + \beta) x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

8.1.2.3. Exemple

On considère un mouvement vibratoire simple défini par :

$x = a \cos(\omega t + \varphi)$, $a \in \mathbb{R}$.

On pose $\alpha = a \exp \mathrm{i}\, \varphi$; $a \cos(\omega t + \varphi)$ est alors la partie réelle de $\alpha \exp \mathrm{i}\, \omega t$.

Soit, par exemple, à composer deux mouvements vibratoires simples de même axe, de même centre, de même pulsation ω. Il s'agit donc d'étudier la somme

$f(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

Les deux termes de cette somme sont les parties réelles de

$\alpha_1 \exp i\omega t \quad (\alpha_1 = a_1 \exp i\varphi_1)$ et de $\alpha_2 \exp i\omega t \quad (\alpha_2 = a_2 \exp i\varphi_2)$.

Donc $f(t)$ est la partie réelle de $(\alpha_1 + \alpha_2) \exp \omega t$ et définit par conséquent un mouvement vibratoire simple de pulsation ω et dont l'amplitude a et la phase φ sont données par la construction dite de Fresnel.

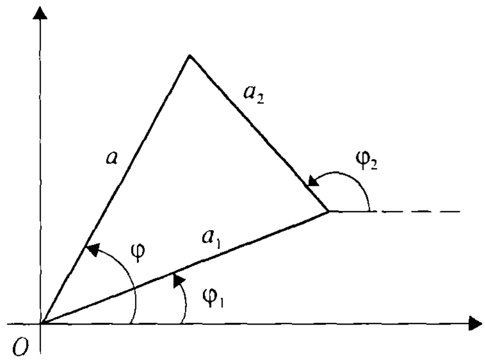


FIGURE: 8.1

8.1.3. Opérateur différentiel

8.1.3.1. Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si à toute fonction f, dérivable sur I, on fait correspondre sa fonction dérivée f', on définit un endomorphisme

$$\begin{aligned} D : \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C}) &\mapsto \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C}) \\ f &\to f' \end{aligned}$$

de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur I, appelé opérateur différentiel.

Plus généralement, en posant $D^2 = D \circ D$, toute expression formelle de la forme $aD^2 + bD + c \quad (a, b, c \in \mathbb{C})$, définit un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$, qui associe à tout élément f de $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$, la fonction $(aD^2 + bD + c)f = af'' + bf' + cf$; on dira encore que $aD^2 + bD + c$ est un opérateur différentiel.

8.1.3.2. Remarque

Certains appareils mécaniques ou électroniques appelés filtres linéaires ont le pouvoir de transformer un signal d'entrée $f(t)$ en un signal de sortie $Af'' + Bf' + Cf$ où A, B, C sont des coefficients réels.

Si le signal d'entrée est de la forme $\alpha \exp i\omega t$ (α complexe, ω réel), étudions le signal de sortie dans un filtre linéaire de formule $D^2 + 1$.

On a $(D^2+1)(\alpha \exp \mathrm{i}\omega t) = \alpha(1-\omega^2)\exp \mathrm{i}\omega t$. Le signal de sortie est donc $\alpha(1-\omega^2)\exp \mathrm{i}\omega t$.

La phase $\overline{\varphi}$ du signal de sortie est

$$\overline{\varphi} = \varphi \begin{cases} \text{à } 2k\pi \text{ près} & \text{si } 1-\omega^2 > 0 \\ \text{à } (2k+1)\pi \text{ près} & \text{si } 1-\omega^2 < 0 \end{cases}$$

L'amplitude $\overline{A}$ du signal de sortie est égale à $A|1-\omega^2|$, $A = |\alpha|$.

8.1.3.3. Proposition

Soient α et β les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $AX^2 + BX + C = 0$, $A, B, C \in \mathbb{C}$. Alors pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$, on a :

$$\boxed{(AD^2 + BD + C)f = A(D-\alpha)\left[(D-\beta)f\right]} \tag{1}$$

Preuve — On vérifie la relation (1) par un calcul direct : $(D-\beta)f = f' - \beta f$. Posons $\varphi = f' - \beta f$. $A(D-\beta)\varphi = A(\varphi' - \alpha\varphi) = A\left(f'' - (\alpha+\beta)f' + \alpha\beta f\right)$

Comme $-A(\alpha+\beta) = B$ et $A\alpha B = C$ on trouve bien :

$$\begin{aligned} A(D-\alpha)\left[(D-\beta)f\right] &= Af'' + Bf' + Cf \\ &= (AD^2 + BD + C)f \end{aligned}$$

8.2. Équations différentielles du premier ordre Équations différentielles linéaires du premier ordre

8.2.1. Généralités

Soit l'équation différentielle du 1er ordre :

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Si F est de classe C^1 et si $F'_{y'}(x, y, y') \neq 0$, le théorème des fonctions implicites permet de résoudre localement cette équation en y' et on est alors amené à étudier une équation de la forme

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

En fait une équation différentielle de la forme (1) n'est pas nécessairement équivalente à une équation de la forme (2). Il se peut en effet que (1) admette une solution qui annule $F'_{y'}(x, y, y')$. De telles solutions sont dites singulières .

Par exemple pour l'équation $xy' - y = 0$, la solution dont le graphe est $(0,0)$ est une solution singulière.

Dans la suite, on n'aura à considérer que des équations de la forme (2). Pour ces équations on admettra le théorème suivant :

8.2.1.1. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue et pourvue d'une dérivée partielle par rapport à y continue sur Ω.

Quel que soit le point (x_0, y_0) de Ω, il existe une solution unique $y(x)$ de l'équation $y' = f(x, y)$ définie dans un voisinage de x_0 et telle que $y(x_0) = y_0$.

Remarque — Ce théorème garantit, sous certaines conditions, l'existence de solutions d'une équation différentielle. Mais il n'est pas toujours possible de déterminer effectivement ces solutions; par exemple pour l'équation $y'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, on ne sait pas calculer de façon explicite une primitive de la fonction $x \to \mathrm{e}^{-x^2}$. Dans ce cas on cherchera à trouver des solutions approchées.

8.2.1.2. Intégration numérique

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

Si l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ possède une solution unique $y(x)$, telle que $y(x_0) = y_0$, cette solution s'écrit

$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, y(u)) \,\mathrm{d}u$.

En choisissant un pas d'intégration h et en posant $\begin{cases} x_n = x_0 + nh \\ y(x_n) = y_n \end{cases}$

on obtient le système

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(u, y(u)) \,\mathrm{d}u \end{cases}$$

Les différentes méthodes d'intégration numérique reposent sur un calcul approché de l'intégrale

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(u, y(u)) \,\mathrm{d}u.$$

Par exemple, en utilisant la méthode des rectangles on a:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(u, y(u)) \,\mathrm{d}u \approx hf(x_n, y_n)$$

d'où $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} \approx y_n + h\,(f(x_n, y_n)) \end{cases}$ ce qui revient à remplacer le point $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ par le point $P'_{n+1}(x_{n+1}, y_{nh} + hy'_n)$ appartenant à la tangente en P_n à la courbe intégrale

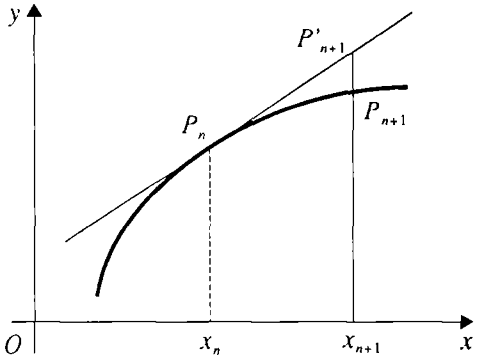


FIGURE: 8.2

Cette méthode, dite méthode d'Euler, n'est pas assez précise. On peut l'améliorer en évaluant l'intégrale $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(u, y(u))\, \mathrm{d}\, u$ par la méthode des trapèzes, en posant

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(u, y(u))\, \mathrm{d}\, u \approx \frac{1}{2}\left(f(x_n, y_n) + (f(x_{n+1}, y_{n+1})\right).$$

8.2.1.3. Interprétation géométrique.

Soit $y' = f(x, y)$ une équation différentielle, où

$$\begin{aligned} f: \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto y' = f(x, y) \end{aligned}$$

est une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

A tout point M de l'ouvert Ω du plan on associe la droite MT de coefficient directeur y'.

Le couple (M, MT) est appelé un élément de contact, et l'application $M \to (M, MT)$ s'appelle *un champ d'éléments de contact* dans le plan. Une courbe (C) est une courbe intégrale si l'ensemble de ses éléments de contact appartient au champ précédent.

8.2.1.4. Equation différentielle attachée à une famille de courbes

Soit une famille de courbes C_λ dépendant d'un paramètre λ et définie par l'équation

$$f(x, y, \lambda) = 0. \tag{1}$$

f étant supposée continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ et de classe C^1 par rapport à (x, y). On suppose qu'en tout point $M(x, y)$ d'un ouvert du

plan passe au moins une courbe C_λ. Le coefficient directeur y' de la tangente en M à la courbe C_λ étant donné par :

$$f'_x(x,y,\lambda) + f'_y(x,y,\lambda)\cdot y' = 0. \qquad (2)$$

L'élimination de λ entre (1) et (2) donne une relation qui définit les éléments de contact des courbes C_λ :

$$F(x,y,y') = 0 \qquad (3)$$

La connaissance de l'équation différentielle $F(x,y,y') = 0$ permet d'obtenir un certain nombre de renseignements sur les courbes C_λ.

Les trajectoires orthogonales des courbes C_λ sont les solutions de l'équation différentielle $F(x,y,-\frac{1}{y'}) = 0$ obtenue en changeant y' en $-\frac{1}{y'}$ dans l'équation (3). En effet supposant l'équation (3) résoluble par rapport à y'. Soit $y' = f(x,y)$ sa forme normale. La tangente en $M(x,y)$ de C_λ a pour pente $m = y' = f(x,y)$ (en axes orthonormées). S'il existe une courbe Γ orthogonale en M à C_λ, sa tangente en ce point a pour pente $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{y'}$.

L'équation différentielle des courbes Γ s'écrit donc :

$$-\frac{1}{y'} = f(x,y) \quad \text{ou} \quad F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right) = 0$$

Exemple — Déterminer les trajectoires orthogonales à la famille des cercles C_λ passant par l'origine et centrés sur l'axe des x.

La famille des cercles C_λ est donnée par l'équation $x^2+y^2-2\lambda x = 0$. L'équation différentielle qui définit la famille C_λ est : $y' = \dfrac{y^2-x^2}{2xy}$. Les trajectoires orthogonales satisfont donc l'équation différentielle.

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (2)\, \mathrm{d}\,y(x^2-y^2) - 2xy\, \mathrm{d}\,x = 0$$

et pour $y \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow \qquad \frac{x^2-y^2}{2y^2}\,\mathrm{d}\,y - \frac{x}{y}\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

En considérant la fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{-2y}$, l'équation (2) s'écrit $f'_y\, \mathrm{d}\,y + f'_x\, \mathrm{d}\,x = 0$.

Par suite la famille des courbes orthogonales est déterminée par l'équation $f(x,y) = C$, soit $x^2+y^2-2Cy = 0$. Ce sont des cercles passant par l'origine et centrés sur l'axe des y (5.8.3.4).

8.2.2. Équations différentielles linéaires du 1er ordre

Soit l'équation différentielle du 1er ordre

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

D'après les définitions du 8.1. l'équation est dite linéaire, si pour tout x fixé, F est une application linéaire ou affine en y et y'. Donc l'équation (1) est linéaire si elle s'écrit sous la forme

$$a_1(x)y' + b_1(x)y + c_1(x) = 0. \tag{2}$$

Dans ce cas $F'_y(x, y, y') = a_1(x)$. Toute solution passant par un point (x_0, y_0) tel que $a_1(x_0) = 0$ est dite singulière. En dehors des solutions singulières l'équation (2) est équivalente à

$$y' - a(x)y = b(x) \tag{3}$$

où $a(x) = -\dfrac{b_1(x)}{a_1(x)}$, $b(x) = -\dfrac{c_1(x)}{a_1(x)}$. L'équation

$$y' - a(x)y = 0 \tag{3'}$$

est appelée équation homogène (ou sans second membre) associée à l'équation (3).

On supposera dans ce qui suit que $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

8.2.2.1. Proposition

Toute solution de l'équation (3) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de cette équation, toute solution de l'équation homogène (3') associée.

Preuve — Soit $f(x)$ une solution quelconque de (3). Donc :

$f'(x) - a(x)f(x) = b(x)$.

Soit $f_1(x)$ une solution particulière de (3), on a :

$f_1'(x) - a(x)f_1(x) = b(x)$

en retranchant membre à membre ces deux équations on obtient :

$(f - f_1)'(x) - a(x)(f - f_1)(x) = 0$

La fonction $f - f_1$ est une solution de (3'). L'intégration de (3) se fait donc en deux étapes :

1) recherche de toutes les solutions de (3'),

2) recherche d'une solution particulière de (3).

Première étape — Soit $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur I; la fonction $x \mapsto f(x) = \exp A(x)$ est une solution de (3'). En effet $f'(x) = a(x)\exp A(x) = a(x)f(x)$.

Soit $g(x)$ une solution quelconque de (3') définie sur I. Posons $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, $(f(x) \neq 0)$. On a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{(f(x))^2} \\ &= \frac{a(x)g'(x)f(x) - a(x)f(x)g(x)}{(f(x))^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $h(x) = C$, où C est une constante; et par suite $g(x) = C \exp A(x)$.

Remarque : l'ensemble des solutions de (3') est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 1.

Deuxième étape — Il reste à trouver une solution particulière de (3). Pour cela il est conseillé de procéder tout d'abord par tâtonnements : on remplace y par une fonction simple : une constante, x, (ou $-x$), x^2 (ou $-x^2$), $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\cos x$, etc., selon la forme de l'équation.

Si les essais n'aboutissent pas, on utilise la méthode dite de la variation de la constante ou méthode de Lagrange : comme $\exp A(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, toute solution $g(x)$ de (3) s'écrit sous la forme $g(x) = C(x) \exp A(x)$; d'où l'idée naturelle de chercher $g(x)$ sous cette forme, où la fonction $C(x)$ est de classe C^1.

Exprimons que $g(x) = C(x) \exp A(x)$ est solution de (3) . On a : $C'(x) \exp A(x) + C(x)a(x) \exp A(x) - a(x)C(x) \exp A(x) = b(x)$ d'où $C'(x) = b(x) \exp[-A(x)]$.

8.2.2.2. Théorème

Soit l'équation différentielle

$$y' - a(x)y = 0, \tag{1}$$

où $a(x)$ est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La solution générale de (1) est de la forme :

$$\boxed{y = K \exp A(x)}$$

où K est une constante et $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur I. La solution générale de l'équation différentielle

$$y' - a(x)y = b(x) \tag{2}$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est de la forme :

$$\boxed{y = (K + C(x)) \exp A(x)}$$

où K est une constante et $C(x)$ est une primitive de $b(x)\exp -A(x)$ sur I.

8.2.2.3. Résolution de l'équation $y' = B\exp \beta x$

Soit l'équation $y' - \alpha y = B\exp \beta x$ où α , β et B sont des constantes complexes. Compte tenu des propriétés de la fonction $\exp \alpha x$, on peut appliquer la méthode de résolution ci-dessus à l'équation différentielle

$$y' - \alpha y = B\exp \beta x. \tag{1}$$

que l'on rencontre fréquemment en physique.

$$y' - \alpha y = 0 \Leftrightarrow y = K\exp \alpha x, \qquad K \in \mathbb{C}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation (1) sous la forme $g(x) = C(x)\exp \alpha x$ où $C(x)$ est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On obtient :

$$C'(x) = B\exp(\beta - \alpha)x.$$

Donc :

(i) si $\alpha = \beta$, $C(x) = Bx$ convient et on a : $g(x) = Bx\exp \alpha x$. La solution générale de (1) est de la forme :

$$\boxed{y = (Bx + K)\exp \alpha x}$$

(ii) si $\alpha \neq \beta$, on peut prendre $C(x) = \dfrac{B\exp(\beta - \alpha)x}{\beta - \alpha}$ et la solution générale de (1) s'écrit :

$$\boxed{y = K\exp \alpha x + \frac{B\exp \beta x}{\beta - \alpha}}$$

8.2.2.4. Applications

1) Amortissement d'une dette, au taux d'intérêt α , moyennant des remboursements fixes γ.

Si $y(t)$ est le montant de la dette à l'instant t, à l'instant $t + h$, on a : $y(t + h) = y(t) + h\alpha y(t) - \gamma h$

d'où $\dfrac{y(t + h) - y(t).}{h} = +\alpha y(t) - \gamma$.

Cette situation peut être alors modélisée par l'équation différentielle

$$y' - \alpha y + \gamma = 0. \tag{1}$$

Les solutions de (1) sont de la forme :

$$y = K\exp \alpha t + \frac{\gamma}{\alpha}.$$

L'amortissent d'une dette, contractée à un taux d'intérêt α l'an, avec des remboursements annuels γ, et amortie en 10 ans, est donnée par :

$$y = +\frac{\gamma}{\alpha}(1 - \exp[-10\alpha]).$$

2) Une particule radioactive p se désintègre à une vitesse v qui est proportionnelle à la masse m de p à chaque instant. m_0 étant la masse initiale, déterminer la période de désintégration de p.

Solution : On a $v = \dfrac{dm}{dt} = km$, avec $k < 0$, d'où $m(t) = C \cdot e^{kt}$; $m(0) = m_0 \Rightarrow m(t) = m_0 e^{kt}$. La période λ de p est le temps au bout duquel on a : $m(\lambda) = \dfrac{m_0}{2} = m_0 e^{k\lambda}$. Cette égalité entraîne que $\lambda = -\dfrac{\operatorname{Ln} 2}{k}$.

8.2.3. Équations à variables séparables Équations homogènes

8.2.3.1. Équations à variables séparables

Soit l'équation différentielle

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

On dira que l'équation est à variables séparables si $f(x, y) = a(x)c(y)$; l'équation (1) s'écrit alors

$$y' = a(x)c(y). \tag{2}$$

On a déjà étudié ce genre d'équation au 8.5.3.4. Si $c(y) \neq 0$ l'équation s'écrit sous la forme :

$$\omega = a(x)\,dx - b(y)\,dy = 0, \qquad \text{où} \quad b(y) = \frac{1}{c(y)}. \tag{3}$$

Si $A(x)$ (*resp.* $B(y)$) est une primitive de $a(x)$ (*resp.* $b(y)$), la fonction $f(x, y) = A(x) - B(y)$ vérifie $\omega = df$. Donc ω est exacte et les solutions de (3) sont définies implicitement par l'équation $A(x) - B(y) = K$, K constante.

Exemple : résoudre l'équation

$$xy' + y = y^2. \tag{1}$$

Les fonctions dont les graphes sont respectivement (0,0) la droite $y = 0$ et la droite $y = 1$ sont solutions de (1). En dehors de ces solutions, l'équation (1) est équivalente à :

$$\omega = +\frac{dy}{y(y-1)} - \frac{dx}{x} = 0. \tag{2}$$

Les solutions de (2) sont données implicitement par l'équation :

$$\int \frac{\mathrm{d}\,y}{y(y-1)} - \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = K, \text{ soit } \ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + K.$$

D'où $\left|\dfrac{(y-1)}{y}\right| = |x|\,\mathrm{e}^K. \Rightarrow \dfrac{y-1}{y} = Cx$, C étant une constante.

On tire de cette relation : $y = \dfrac{1}{1-Cx}$.

8.2.3.2. Équations homogènes

Une fonction $f(x,y)$ est dite homogène (de degré 0) si :

$$f(tx,ty) = f(x,y), \quad \forall x,y,t, \quad t \neq 0.$$

Une équation différentielle

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

est dite homogène, si $f(x,y)$ est homogène (de degré 0).

Soit $(M(x,y), MT)$ l'élément de contact défini par (1). Si l'équation (1) est homogène, la tangente au point $M'(\lambda x, \lambda y)$ $(\lambda \neq 0)$ est parallèle à MT. Donc l'ensemble des courbes intégrales de (1) est globalement invariant par toute homothétie de centre O.

Par suite y' ne dépend que du rapport $\dfrac{y}{x}$. En posant $t = \dfrac{1}{x}(x \neq 0)$ l'équation (1) devient

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

Posons $v = \dfrac{y}{x}$, alors $y = vx$ et $y' = v'x + v$. L'équation (2) se transforme alors en l'équation : $v'x + v = f(1,v)$, soit :

$$\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,x} = (f(1,v) - v)\,\frac{1}{x}. \tag{3}$$

et l'on est ainsi amené à résoudre une équation à variables séparables.

Exemple : résoudre l'équation :

$$y'(y+x) - (y-x) = 0. \tag{1}$$

(1) admet pour solution singulière la fonction dont le graphe est (0, 0). En dehors de cette solution singulière,

$$y' = \frac{y-x}{y+x}. \qquad (1) \Leftrightarrow (2)$$

Posant $y = vx$, on obtient : $xv' = \dfrac{1+v^2}{v+1}$, qui est a variables séparables, d'où :

$$\int \frac{v \cdot \mathrm{d}v}{1+v^2} + \int \frac{\mathrm{d}d}{1+v^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = C.$$

8.3. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soit

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

une équation différentielle du second ordre. Conformément aux définitions de 8.1, l'équation (1) est dite linéaire, si pour x fixé l'application $(y, y', y'') \mapsto F(x, y', y'')$ est une application linéaire ou affine de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas l'équation (1) s'écrit :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \tag{2}$$

l'équation (2) est dite à coefficients constants si $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des constantes.

Dans ce paragraphe, on étudie les équations de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{3}$$

où a, b, c sont des constants réelles ou complexes, $g(x)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Comme dans 8.3.2, on associe à (3) l'équation linéaire et homogène :

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{3'}$$

En raisonnant de la même manière qu'en 8.3.2, on peut alors énoncer :

8.3.1. Proposition

Toute solution de l'équation (3) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de cette équation, toute solution de l'équation sans second membre (3′) associée à (3).

8.3.2. Intégration de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

où a, b sont des constantes réelles ou complexes. Soit $f(x)$ une solution de (1). on a:

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = (D^2 + aD + b)\,(f(x))$$

ou bien :

$$f'' + af' + bf = (D^2 + aD + b)f$$

où D est l'opérateur différentiel : $D(f) = f'$.

D'après le paragraphe 8.2.3.3.

$$(D^2 + aD + b)(f) = [(D - \beta) \cdot (D - \alpha)]\,(f) \tag{2}$$

où α et β sont les racines du trinôme du second degré $x^2 + ax + b = 0$.

Posons $(D - \alpha)(f) = \varphi$. Intégrer (2) revient à intégrer successivement :

$$(D - \beta)\varphi = 0 \tag{3}$$

$$(D - \alpha)(f) = \varphi. \tag{4}$$

D'après les résultats de 8.3.2.3. les solutions de l'équation (3) sont de la forme : $\varphi = C' \exp \beta x$. C étant une constante arbitraire réelle ou complexe. L'équation (4) s'écrit alors :

$$(D - \alpha)f = C' \exp \beta x$$

Et a pour solutions (8.3.2.3) :

$$f(x) = A \exp \alpha x + B \exp \beta x, \quad \text{si } \alpha \neq \beta \left(B = \frac{C}{\beta - \alpha}\right)$$

et

$$f(x) = (Ax + B) \exp \alpha x \quad \text{si } \alpha = \beta.$$

A et B sont des constantes arbitraires réelles ou complexes.

On peut donc énoncer

8.3.2.1. Théorème

Soit l'équation différentielle

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0} \tag{1}$$

Soient α et β les racines de l'équation $r^2 + ar + b = 0$. appelée *équation caractéristique* de (1). Les solutions de l'équation (1) sont de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = A \exp \alpha x + B \exp \beta x, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ y = (Ax + B) \exp \alpha x, & \text{si } \alpha = \beta \end{array}}$$

où A et B sont des constantes arbitraires réelles ou complexes.

8.3.2.2. Remarques

1) Soit

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

i) Si $\alpha \neq \beta$, $\exp \alpha x$ et $\exp \beta x$ sont des solutions particulières de l'équation (1) linéairement indépendantes. En effet si :

$$\lambda \exp \alpha x + \mu \exp \beta x = 0, \quad \forall x, \ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

en faisant $x = 0$ dans (2), on obtient $\lambda + \mu = 0$ et en dérivant (2) par rapport à x, et en faisant $x = 0$, on obtient $\alpha\lambda + \beta\mu = 0$. La seule solution du système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = 0 \end{cases} \quad \text{pour } \alpha \neq \beta, \text{ est } \lambda = \mu = 0.$$

ii) Si $\alpha = \beta$, α vérifie : (racine double)

$$\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + b = 0 \\ 2\alpha + a = 0 \end{cases}$$

Ces relations entraînent que $\exp \alpha x$ et $x \exp \alpha x$ sont des solutions de (1) linéairement indépendantes.

Donc les solutions de (1) sont définies sur $\mathbb{R}$ et constituent un espace vectoriel complexe de dimension 2.

2) Si a et b sont réels

i) si $a^2 - 4b \geq 0$, α et β sont réels, et les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} y = A \exp \alpha x + B \exp \beta x, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ y = (Ax + B) \exp \alpha x, & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

où A et B sont des constantes réelles arbitraires.

ii) si $a^2 - 4b < 0$, α et β sont complexes conjugués

$\alpha = \lambda + \mathrm{i}\,\mu$, $\beta = \lambda - \mathrm{i}\,\mu$.

En remplaçant dans $A \exp \alpha x + B \exp \beta x$ (A, B complexes), $\exp \alpha x$ et $\exp \beta x$ par $\exp \lambda x(\cos \mu x + \mathrm{i} \sin \mu x)$, la solution générale se met sous la forme :

$$y = (\exp \lambda x)(L \cos \mu x + M \sin \mu x)$$

où L et M sont des constantes réelles arbitraires. De i) et ii) on déduit que les solutions réelles de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ (a, $b \in \mathbb{R}$) constituent un espace vectoriel réel de dimension 2.

3) Même si les constantes a et b sont réelles, on peut avoir à considérer les solutions complexes de l'équation $y'' + ay' + by = 0$. Alors ces solutions constituent un espace vectoriel complexe de dimension 2. Dans ce cas si $f(x)$ est une solution complexe, alors la fonction $\overline{f(x)}$, conjuguée de $f(x)$, est aussi une solution.

8.3.2.3. Exemples

i) Soit l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$

Son équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$; les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. D'où la solution générale :

$$y = A \exp x + B \exp 2x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

ii) L'équation différentielle $y''+y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$. Les racines de cette équation sont $r_1 = \mathrm{i}$ et $r_2 = -\mathrm{i}$. Donc les solutions sont de la forme :

$$y = A \cos x + B \sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

iii) Considérons l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$

Elle a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$. Celle-ci a pour solution double $r_1 = 1$. Donc les solutions sont de la forme :

$$y = (Ax + B) \exp x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

8.3.3. Recherche d'une solution particulière de

$$y'' + ay' + by = g(x), \quad a, b \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

g est une fonction à valeurs complexes.

Comme pour le cas des équations différentielles linéaires du 1er ordre, on procède par étapes :

1) On procède par tâtonnements en remplaçant y par une fonction simple ($x, \sin x, \cos x, \mathrm{e}^x, \ln x$,etc.) selon la forme de l'équation;

2) On écrit si possible $g(x)$ sous la forme d'une somme de fonctions plus simples

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x).$$

puis on cherche une solution particulière y_k de l'équation $y'' + ay' + by = g_k(x)$. Une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = g(x)$ est alors de la forme $y = \sum_{n}^{k=1} y_k$.

3) Si a et b sont réels, et $g(x)$ est une fonction réelle, qui est la partie réelle (resp. partie imaginaire) d'une fonction complexe $h(x)$ « *sympathique* » ($\cos 3x = \mathscr{Re}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$, $\mathrm{e}^x \sin 2x = Im\,(\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x})$ ....).

On cherche une solution particulière (complexe) de l'équation $y'' + ay' + by = h(x)$. Si $z_1(x)$ est une telle solution, alors $\mathscr{Re}\,(z_1(x))$ (resp. $Im\,(z_1(x))$ est solution particulière de $y'' + ay' + by = g(x)$.

En effet, posons : $z_1(x) = k_1(x) + \mathrm{i}\,k_2(x)$. On a :

$z_1'' + az_1' + bz_1 = \mathscr{R}e\,(h(x)) + \mathrm{i}\, Im\,(h(x))\,.$

D'où (a, b étant réels)

$(k_1'' + ak_1' + bk_1) + \mathrm{i}\,(k_2'' + ak_2' + bk_2) = \mathscr{R}e\,(h(x)) + \mathrm{i}\, Im\,(h(x))\,.$

Par identification on obtient :

$k_1'' + ak_1' + bk_1 = \mathscr{R}e\,(h(x))\,.$

$k_2'' + ak_2' + bk_2 = Im\,(h(x))\,.$

4) <u>$g(x)$ est un polynôme de degré n</u> : la forme de l'équation montre que l'on peut chercher, comme solution particulière, un polynôme $P(x)$ (de degré n si $b \neq 0$, de degré $n+1$, si $b = 0$) dont on déterminera les coefficients par identification .

5) <u>$g(x) = P(x) \exp \gamma x$</u>, où $P(x)$ est un polynôme, γ une constante réelle ou complexe : on se ramène au cas précédent en faisant le changement de fonction dans l'équation (2) $y \to z$, défini par $y = z \exp \gamma x$.

6) <u>Méthode de la variation des constantes</u>.

On sait que les solutions de l'équation

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (1)$$

constituent un espace vectoriel de dimension deux, dont on a déterminé une base $\{y_1(x), y_2(x)\}$ On cherche une solution particulière de

$$y'' + ay' + by = g(x) \qquad (2)$$

sous la forme $y = \lambda_1(x)y_1(x) + \lambda_2(x)y_2(x)$ où $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ sont des fonctions de classe C^1. En reportant cette expression de y dans l'équation (2), on trouve :

$g(x) = (\lambda_1'y_1' + \lambda_2'y_2') + (\lambda_1'y_1 + \lambda_2'y_2)' + a(\lambda_1'y_1 + \lambda_2'y_2).$

Il suffit alors de prendre $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ telles que :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1'y_1 + \lambda_2'y_2 = 0 \\ \lambda_1'y_1' + \lambda_2'y_2' = g(x) \end{cases}} \qquad (3)$$

Ce système linéaire a une solution unique en λ_1', λ_2' car le discriminant des inconnues $y_1y_2' - y_1'y_2$ est différent de 0 pour tout x.

Cette propriété peut être vérifiée directement pour les valeurs trouvées pour y_1 et y_2 dans les remarques 8.4.2.2 .

8.3.3.1. Exemples

Trouver une solution particulière des équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 2y' + y = (x^2 + x + 1) \exp x$

On pose $y = z \exp x$; en reportant dans l'équation on trouve $z'' = x^2 + x + 1$.

D'où $z' = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + A$ et $z = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} + Ax + B$.

On peut prendre comme solution particulière $z_1 = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2}$. $(A = B = 0)$, d'où $y_1 = z_1 \exp x$.

2) $y'' + y = \cos^2 x$

Comme $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2x}{2}$, l'équation s'écrit

$$y'' + y = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

On est amené à chercher une solution particulière pour

$$y'' + y = \frac{1}{2} \tag{1}$$

et une solution particulière de

$$y'' + y = \frac{}{2}\cos 2x = \mathscr{R}e\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,x}\right). \tag{2}$$

$y_1 = \dfrac{1}{2}$ est une solution particulière de (1). On cherche une solution particulière de

$$y'' + y = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,x}$$

en posant $y = z\,\mathrm{e}^{2ix}$ on obtient l'équation $z'' + 4iz' - 3z = \dfrac{1}{2}$ dont une solution particulière est $z_2 = -\dfrac{1}{6}$. Donc une solution particulière de (3') est $y_2 = z_2 \exp 2\mathrm{i}\,x = -\dfrac{1}{6}\exp 2\mathrm{i}\,x$ et par suite $\mathscr{R}e\left(\dfrac{1}{6}\exp 2\mathrm{i}\,x\right) = -\dfrac{1}{6}\cos 2x$ est une solution particulière de (2).

En définitive une solution particulière de $y'' + y = \cos^2 x$ est $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\cos 2x$.

3)

$$y'' + y = \operatorname{tg} x, \quad \text{pour } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

On sait que $y_1 = \cos x$ et $y_2 = \sin x$ sont deux solutions indépendantes de $y''+y = 0$. On cherche une solution particulière sous la forme $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, où λ_1 et λ_2 sont des fonctions de x de classe C^1. On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda_1' \cos x + \lambda_2' \sin x = 0 \\ -\lambda_1' \sin x + \lambda_2' \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Celui-ci a pour solution $\lambda_1' = -\sin x \operatorname{tg} x$ et $\lambda_2' = \sin x$. D'où

$$\lambda_1 = -\int \sin x \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}\,x = \sin x - \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right|$$

$$\lambda_2 = \int \sin x \,\mathrm{d}\,x = -\cos x.$$

et $y = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x = -\cos x \ln\left|\dfrac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right|$.

8.4. À RETENIR

1) L'équation différentielle

$$y' - a(x)y = 0$$

$a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant une fonction continue a pour solution générale $y = K \exp A(x)$, où K est une constante arbitraire et $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur l'intervalle I.

2) L'équation différentielle

$$y' - a(x)y = b(x).$$

$b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant une fonction continue a pour solution générale $y = (K + C(x)) \exp A(x)$, où $C(x) \exp A(x)$ est une solution particulière, avec :

$C(x) = \int (b(x) \exp -A(x)) \,\mathrm{d}\,x$.

3) Les solutions de :

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad a, b \in \mathbb{C} \tag{1}$$

sont, α et β étant les racines de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l} y = A \exp \alpha x + B \exp \beta x, \text{ si } \alpha \neq \beta \\ y = (Ax + B) \exp \alpha, \text{ si } \alpha = \beta \end{array}}$$

A et B sont des constantes arbitraires, réelles ou complexes.

Les solutions de

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{2}$$

sont obtenues en ajoutant aux solutions de (1) une solution particulière de l'équation (2).

8.5. Exercices et problèmes

1) Intégrer les équations différentielles suivantes :

a) $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

b) $y' = 1 + \mathrm{tg}^2 x$.

c) $(1 + x^2)y' - 1 - y^2 = 0$.

d) $(y + 3)\,\mathrm{d}\,x + x^2\,\mathrm{d}\,y = 0$.

e) $\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}\,y - 2\sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{d}\,x = 0$.

f) $x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2) Soit l'équation différentielle $xy' - 2y - x^2 = 0$. a) Déterminer ses solutions dans les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

b) Montrer que l'on peut « raccorder » ces solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier

c) Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ qui valent 0 pour $x = 1$.

2) Intégrer les équations différentielles suivantes :

$y'' + 2y' + 10y = \sin x$

$y'' + m^2 y = x\cos mx$

$y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^x \cos 3x$

$y'' - 3y' + 2y = x$.

$y'' + y = 3\sin x$.

3) a) Intégrer l'équation différentielle

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

b) En déduire les solutions de l'équation :

$$y'' - 5y' + 6y = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}^2 x}$$

(en utilisant les résultats du 8.4.3.6).

4) On considère l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y'' + 5xy' + 3y = 0 \qquad (E)$$

a) Montrer qu'il existe deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ tels que $(1 + x^2)y'' + 5xy' + 3y$ soit, quel que soit x, la dérivée par rapport à x de $[y'.P(x) + yQ(x)]$.

b) En déduire la solution générale de (E).

5) a) Trouver les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$x(x^2 + 3y^2)\,\mathrm{d}\,x + y\,(y^2 + 3x^2)\,\mathrm{d}\,y = 0 \qquad (E)$$

b) En posant $x = u + 1$, $y = v$, ramener l'équation différentielle

$$(3y - 7x + 7)\,\mathrm{d}\,x + (7y - 3x + 3)\,\mathrm{d}\,y = 0$$

à une équation homogène, puis trouver ses solutions.

6) a) Intégrer l'équations différentielle

$$(\mathrm{sh}\, x)y' - (\mathrm{ch}\, x)y + 1 = 0. \tag{1}$$

b) Déterminer l'intégrale particulière qui tend vers une limite finie quand x tend vers $-\infty$; on désigne par C_1 la courbe représentative.

c) Déterminer l'intégrale particulière qui tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$; on désigne par C_2 la courbe représentative.

d) Représenter graphiquement C_1 et C_2 dans le plan muni d'un repère orthonormé Oxy .

e) Montrer que toute courbe intégrable passe par un point fixe A que l'on déterminera.

7) Soit

$$y' + a(x)y = b(x) : \tag{E'}$$

une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques de période 1; on pose

$$\alpha(x) = \exp\left(-\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

a) Montrer que $x \mapsto \alpha(x)$ est une solution de l'équation sans second membre associée à (E).

b) Montrer que pour tout x, on a : $\alpha(x+1) = \alpha(1)\cdot\alpha(x)$.

c) Montrer que la solution générale y de (E) est définie par

$$y(x) = \alpha(x)\left(A + \int_0^x \frac{b(t)}{\alpha(t)}\,\mathrm{d}t\right).$$

d) On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{b(t)}{\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$ et $h(x) = \displaystyle\int_0^{x+1} \frac{b(t)}{\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$.

Calculer la dérivée de h; en déduire que l'on a pour tout x :

$$f(x+1) = f(1) + \frac{1}{\alpha(1)} f(x).$$

e) Montrer que si $\alpha(1)$ est différent de 1, l'équation (E) admet une solution unique de période 1 dont on donnera l'expression .

8) Équation de Bernoulli .

a) On considère l'équation différentielle

$$y' + f(x)y = g(x)y^n. \tag{E}$$

En posant $z = y^{1-n}$, montrer que (E) se ramène à une équation différentielle linéaire

$$z' + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x).$$

b) Application : trouver les solutions de l'équation différentielle $y' + x^2y = y^3 \cos x$.

9) D'après la loi de Newton, la vitesse de refroidissement d'un corps quelconque dans l'air est proportionnelle à la différence des températures du corps et du milieu. La température de l'air étant de 20°C, le corps se refroidit de 100°C à 60°C en l'espace de 20 minutes. En combien de temps sa température tombera-t-elle à 30°C?

10) Une particule de masse m située à 500 m de la terre au temps $t = 0$, fait une chute verticale. On suppose que la résistance de l'air R est proportionnelle à la vitesse de la particule. On note g l'accélération de la pesanteur. A quel instant la particule atteindra-t-elle la terre?

11) On veut déterminer les applications différentiables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient l'équation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^4 + y^4)^{1/2} \qquad (E)$$

i) Montrer que la fonction $g(x,y) = (x^4+y^4)^{1/2}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et que $\frac{1}{2}g(x,y)$ est solution du (E).

ii) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $F = f - \dfrac{1}{2}g$ vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0.$$

iii) En passant aux coordonnées polaires (r,θ) montrer que l'équation (E) devient :

$$r\frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

En déduire les solutions de (E) .

Index historique

Archimède (287-212 avant J.-C.) : mathématicien grec, un des précurseurs de l'analyse infinitésimale. A Syracuse, il dirigea des travaux portuaires, navals et militaires.

Bernoulli (Les) : famille de mathématiciens suisses, qui joua durant tout le XVIII^{e} siècle un rôle de premier plan. Jacques (1654-1705), Jean (1667-1748) et Daniel (1700-1782) ont établi des résultats importants, en analyse, en calcul des probabilités et en mécanique.

Bernstein Serge Nathanovitch (1880-1968) : mathématicien russe, ses travaux portent sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes et le calcul des probabilités.

Bolzano Bernard (1781-1848) : né à Prague, Bolzano fit des études de théologie et de mathématiques. Prêtre en 1804, il occupa la chaire de philosophie de la religion en 1805 à l'université de cette ville, avant d'être destitué en 1819 pour ses idées non conformistes.

Cauchy Augustin Louis (1789-1857) : né à Paris, Cauchy, après l'Ecole Polytechnique, passa par l'Ecole des Ponts et Chaussées et participa comme ingénieur à divers travaux publics. Membre de l'Académie des Sciences en 1816, il fut le plus prolifique des mathématiciens après Euler. Son œuvre, dont une part importante est consacrée à l'analyse, embrasse tous les domaines des mathématiques.

Darboux Jean Gaston : né à Nîmes en 1842, il mourut à Paris en 1917. Ses travaux portent sur la géométrie différentielle, la théorie de l'intégration et les équations aux dérivées partielles. Il fut élu à l'Académie des Sciences en 1904 et est à l'origine de la modification complète du régime de la licence, de l'établissement du doctorat mention sciences et du développement de l'université de Paris.

Dini Ulisse (1845-1918) : mathématicien italien, ses travaux portent sur la géométrie et l'analyse, en particulier les séries de Fourrier.

Euclide (vers 295 avant J.-C.) : fondateur de l'école mathématiques d'Alexandrie. On sait très peu de choses sur sa vie. Son œuvre fondamentale, « les Éléments », codifie la mathématique grecque qu'utiliseront après lui Appolonios de Perga et Archimède.

Euler Léonhard (1707-1783) : mathématicien et physicien suisse. Un des plus grands mathématiciens de tous les temps et le plus prolifique. Devenu aveugle vers 1768, il continua à travailler grâce à une mémoire prodigieuse. Son œuvre couvre tous les domaines des mathématiques: calcul différentiel, équations différentielles, géométrie, fonctions circulaires, mécanique,...

Fermat (Pierre de) : mathématicien français (1601-1665) connu pour ses travaux dans le domaine du calcul infinitésimal et la théorie des

nombres. Son célèbre problème (solutions entières de l'équation $x^n + y^n = z^n$, $n \geq 3$) ne fut résolu, semble-t-il, que tout récemment.

Lagrange Joseph Louis (1736-1813) : mathématicien français, a fait d'importantes découvertes dans tous les domaines des mathématiques. Membre de la Commission des poids et mesures et du bureau des longitudes dès 1795.

Leibniz Gottfried Wilhelm (1646-1716) : mathématicien allemand, fut conseiller à la cour suprême de Mayence et conseiller de Pierre Le Grand de Russie. Ses œuvres en algèbre et logique sont restées inédites pendant longtemps.

Lipschitz Rudolf Otto Sigismund (1832-1903) : mathématicien allemand. Travaux dans la théorie des équations différentielles et physique mathématique, théorie des nombres.

Mac-Laurin Colin (1698-1746) : mathématicien écossais, disciple de Newton. Son traité des fluxions (1742) contient notamment la formule du développement en série entière d'une fonction, qui porte son nom.

Minkowski Herman (1864-1909) : mathématicien allemand, inventa la méthode dite « géométrie des nombres », consistant à utiliser des considérations géométriques en théorie des nombres. Il a aussi laissé des travaux importants dans la théorie mathématique de la relativité restreinte.

Newton (Sir Isaac) : mathématicien britannique (1642-1727). En 1687 apparaît son œuvre principale : *Philosophiæ naturalis principia mathematica* dans laquelle il expose notamment ses travaux en analyse et la théorie de la gravitation universelle

Polya George (1887-) : mathématicien hongrois, connu pour ses travaux en analyse complexe, probabilité, théorie des nombres.

Riemann Georg Friederich Bernard (1826-1866) : mathématicien allemand, mourut de tuberculose. En plus de ses travaux en analyse, il jeta les bases de la topologie différentielle et de la géométrie différentielle. Les variétés Riemanniennes font encore l'objet de recherches intenses.

Rolle Michel (1652-1719) : mathématicien français. Sa « méthode des cascades » utilisée pour la séparation des racines des équations algébiques n'a qu'un rapport lointain avec le théorème qui porte son nom.

Schwartz Hermann Amandus (1843-1921) : membre des académies bavaroise et prussienne des Sciences, succéda en 1892 à Weierstrass à l'université de Berlin. Il a produit d'importants travaux en analyse.

Serret Alfred (1819-1885) : mathématicien français. Son nom reste attaché à côté de celui de F.J. Frenet (1816-1900), aux foormules vectorielles liant l'arc, la courbure et la torsion des courbes gauches.

Taylor Brook (1685-1731) : mathématicien anglais. Dans son ouvrage principal *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715), il établit la célèbre formule à laquelle son nom est resté attaché, ainsi que d'autres résultats importants d'analyse.

Weierstrass Karl Theodor Wilhelm (1815-1897) : mathématicien allemand, membre de l'Académie des sciences de Berlin en 1856. Après Cauchy et Riemann, il a achevé de mettre l'analyse sur les bases entièrement rigoureuses et il y a apporté de très belles découvertes.

Index terminologique

Imprimé en France par I.M.E. - 25110 Baume-les-Dames
Dépôt légal n° 4058-03-1996
Collection n° 49 - Edition n° 01
59/4387/3

La collection **Universités francophones**, créée en 1988 à l'initiative de l'**UREF**, propose des ouvrages de référence, des manuels spécialisés et des actes de colloques scientifiques aux étudiants de deuxième et troisième cycle universitaire ainsi qu'aux chercheurs francophones et se compose de titres originaux paraissant régulièrement.

Leurs auteurs appartiennent conjointement aux pays du Sud et du Nord et rendent compte des résultats de recherches et des études récentes entreprises en français à travers le monde. Ils permettent à cette collection pluridisciplinaire de couvrir progressivement l'ensemble des enseignements universitaires en français.

Enfin, la vente des ouvrages à un prix préférentiel destinés aux pays du Sud tient compte des exigences économiques nationales et assure une diffusion adaptée aux pays francophones.

Ainsi, la collection **Universités francophones** constitue une bibliothèque de référence comprenant des ouvrages universitaires répondant aux besoins des étudiants de langue française.

Les auteurs de ce livre ont la double vocation de chercheurs et d'enseignants. Leur ouvrage couvre largement le programme d'Analyse de 1re année du 1er cycle universitaire, avec des compléments importants sur la convergence uniforme, les fonctions de plusieurs variables et les fonctions vectorielles.

A la fin de chaque chapitre se trouve un résumé regroupant les principaux résultats ainsi qu'un choix judicieux d'exercices et de problèmes d'applications, illustrant et complétant le cours.

Le tout constitue, c'est le souhait des auteurs, un outil de travail précieux pour les étudiants du 1er cycle universitaire scientifique ainsi que pour les élèves des classes de Mathématiques supérieures.

*

* *

Edmond FEDIDA, agrégé de mathématiques, docteur ès sciences mathématiques, est professeur des Universités françaises. Il est actuellement, dans le cadre de la Coopération, professeur à l'Université d'Abidjan, après avoir servi, dans le même cadre, durant plusieurs années comme professeur à l'Université de Dakar (UCAD).

Mamadou SANGHARE, docteur ès sciences mathématiques, est maître de conférences et directeur de l'Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques, de la Physique et de la Technologie, (IREMPT) de l'université de Dakar (UCAD).

El Hadji Cheikh M'backé DIOP, docteur en sciences mathématiques, est maître-assistant à l'Université de Dakar (UCAD).

Europe occidentale, Amérique du Nord, Japon : 160 FF • Autres pays (prix préférentiel UREF) : 40 FF

9 782850 698392

I.S.S.N. 0993-3948
Diffusion HACHETTE ou ELLIPSES selon pays
Distribution Canada D.P.L.U.

59.4387.3
Imprimé en France
S.S.Q.I. - PARIS